



Année 2006

Concours d'entrée en 1^{ère} année

Epreuve de Mathématiques

Durée : 4 heures

Coefficient : 12

AVERTISSEMENT :

Dans l'évaluation des copies, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction, notamment pour ce qui est de la présentation, de la clarté des raisonnements et de la concision.

L'épreuve comporte un problème et un exercice indépendants, ils doivent être rédigés sur des copies séparées.

Problème : 14 points

Exercice : 6 points

N.B.: Ce document comporte 5 pages.

Problème sur 14 points.

Première partie.

1) On définit la suite $(T_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels, éléments de $\mathbb{R}[X]$, en posant :

$$\begin{cases} T_0(X) = 1 \\ T_1(X) = X \\ \text{Pour tout entier } n \geq 1, T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X). \end{cases}$$

- 2) a) Montrer que, pour tout entier n , le degré du polynôme T_n est égal à n .
b) Déterminer le coefficient du terme de plus haut degré du polynôme T_n .
c) Montrer que, pour tout entier n et pour tout réel θ :

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta.$$

- 3) Soit N un entier naturel, montrer que la famille de polynômes $(T_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une base de l'espace $\mathbb{R}_N[X]$, ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à N .
4) Montrer que, pour tout couple (n, m) d'entiers naturels, l'application $x \mapsto \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $]-1, 1[$.
5) Calculer, pour tout couple (n, m) d'entiers naturels, l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Deuxième partie.

1) Vérifier que l'application définie sur $(\mathbb{R}[X])^2$ par :

$$(P|Q) = \int_{-1}^{+1} \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. $\mathbb{R}[X]$ désignera l'espace préhilbertien réel muni du produit scalaire précédent. On notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

- 2) Soit N , un entier naturel quelconque, B la base canonique de $\mathbb{R}_N[X]$ égale à $(1, X, X^2, \dots, X^N)$. Déterminer, en fonction des polynômes T_n de la première partie, la base orthonormée B' déduite de la base B par le procédé de Schmidt.
3) On note π_N la projection orthogonale sur l'espace $\mathbb{R}_N[X]$ dans l'espace préhilbertien $\mathbb{R}[X]$.
a) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, exprimer le projeté orthogonal $\pi_N(P)$ à l'aide des polynômes T_n de la première partie.

- b) On rappelle que $d(P, \mathbb{R}_N[X])$ désigne la distance du polynôme P au sous-espace $\mathbb{R}_N[X]$, et qu'elle est définie par :

$$d(P, \mathbb{R}_N[X]) = \inf_{Q \in \mathbb{R}_N[X]} \|P - Q\|.$$

Exprimer la distance $d(P, \mathbb{R}_N[X])$ à l'aide du polynôme P et des polynômes T_n de la première partie.

- 4) Dans cette question, on désire calculer le produit scalaire $(X^{2N}|T_k)$ pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq 2N - 1$. On note alors :

$$I_{2N,k} = \int_0^\pi (\cos t)^{2N} \cos(kt) dt.$$

- a) Soit t un réel de l'intervalle $[0, \pi]$. On pose $z = e^{it}$, exprimer $(\cos t)^{2N}$ en fonction de z .
 b) Exprimer, pour tout réel t de l'intervalle $[0, \pi]$, le nombre $(\cos t)^{2N}$ en fonction des nombres $T_n(\cos(t))$, définis dans la première partie pour tous les entiers naturels n .
 c) Calculer $I_{2N,0}$ en fonction de coefficients binomiaux.
 d) Calculer, si N est supérieur ou égal à 1, pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq 2N - 1$, l'intégrale $I_{2N,k}$.
 e) En déduire la distance de X^{2N} au sous-espace $\mathbb{R}_{2N-1}[X]$.

Troisième partie.

Dans cette partie, on appelle E l'ensemble des applications de classe C^1 définies sur $[-1, 1]$.

- 1) Montrer que l'application définie sur $E \times E$ par :

$$(f|g) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

est un produit scalaire sur E .

- 1) Vérifier que l'ensemble des applications polynômes définies sur $[-1, 1]$ est inclus dans l'ensemble E . On notera encore $\mathbb{R}[X]$ cet ensemble, on considère de même que $\mathbb{R}_N[X]$ est inclus dans E pour tout entier naturel N .
 2) Soit h l'application définie sur $[-1, 1]$ par :

$$h(x) = \frac{1}{\frac{5}{4} + x}.$$

- a) Montrer que l'application h appartient à l'ensemble E .
 b) Soit \tilde{h} l'application définie sur \mathbb{R} par :

$$\tilde{h}(t) = h(\cos(t)).$$

- α) On pose $u = e^{it}$, exprimer $\tilde{h}(t)$ en fonction de u .
 β) Montrer que $\tilde{h}(t)$ peut s'écrire comme somme de deux séries entières de variables respectives u et $\frac{1}{u}$.

- γ) En déduire le développement de \tilde{h} en série de Fourier.
- c) Soit N un entier naturel, on note, comme dans la deuxième partie, π_N la projection orthogonale sur l'espace $\mathbb{R}_N[X]$.
- α) Calculer, pour tout entier naturel n , le produit scalaire $(h|T_n)$ (le polynôme T_n a été défini dans la première partie).
- β) En déduire la distance de h au sous-espace $\mathbb{R}_N[X]$.

Exercice sur 6 points.

Soit E un espace vectoriel sur le corps des complexes, de dimension finie $n > 0$. On désigne par f une application linéaire de E dans E , on note $rg(f)$, le rang de l'application f .

Première partie.

On suppose dans cette partie, que r est un entier compris entre 1 et n et que l'on a :

$$rg(f) = rg(f^2) = r.$$

1) Montrer que :

$$Ker f \oplus Im f = E.$$

2) En déduire qu'il existe une base B de E et une matrice carrée A , d'ordre r , inversible, telles que la matrice M représentative de l'application f dans la base B s'écrive par blocs sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

3) On admettra que le polynôme caractéristique de la matrice A est un polynôme annulateur de la matrice A .

Montrer qu'il existe un polynôme annulateur de la matrice M de degré $r + 1$.

Deuxième partie.

On suppose, dans cette partie, que r est un entier compris entre 1 et n , p un entier compris entre 0 et $r - 1$, et que l'on a :

$$\begin{cases} rg(f) = r \\ rg(f^2) = p \end{cases}$$

- 1) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Justifier.
- 2) Déterminer, en fonction des entiers r et p , la dimension du sous-espace vectoriel $Ker f \cap Im f$.
- 3) Montrer qu'il existe une base B de E , des matrices Y_1 et Y_2 à $r - p$ lignes et p colonnes, une matrice Y_3 à $n - 2r + p$ lignes et p colonnes, une matrice Y_4 carrée d'ordre p , telles que la matrice N représentative de l'application f dans la base B s'écrive par blocs sous la forme :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & Y_1 \\ I_{r-p} & 0 & 0 & Y_2 \\ 0 & 0 & 0 & Y_3 \\ 0 & 0 & 0 & Y_4 \end{pmatrix}$$

où I_{r-p} désigne la matrice identité d'ordre $r - p$.

- 4) Montrer que Y_4 est une matrice inversible.
- 5) Exprimer le polynôme caractéristique de la matrice N en fonction du polynôme caractéristique de la matrice Y_4 .

Problème.

Première Partie.

1) Pas de question.

- 2) a) Par une récurrence évidente sur n , on montre que le degré de T_n est égal à n .
 b) Soit a_n le terme de plus haut degré de T_n , on a : $a_{n+1} = 2a_n$ et $a_0 = 1$, donc $a_n = 2^n$.
 c) Par récurrence sur n , on pose $P(n) : \forall p \leq n, T_p(\cos \theta) = \cos p\theta$.
 $P(0)$ est vraie, supposons $P(n)$, $T_{n+1}(\cos \theta) = 2 \cos \theta T_n(\cos \theta) - T_{n-1}(\cos \theta)$
 D'où : $T_{n+1}(\cos \theta) = 2 \cos \theta \cos n\theta - \cos(n-1)\theta$, or,

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2 \cos\left(\frac{n+1+n-1}{2}\right)\theta \cos\left(\frac{n+1-n+1}{2}\right)\theta$$

donc $\cos(n+1)\theta = 2 \cos \theta \cos n\theta - \cos(n-1)\theta$ et $P(n+1)$ est vraie.

- 3) La famille $(T_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une famille libre car les degrés sont échelonnés, c'est une base car elle est libre de cardinal $N+1 = \dim(\mathbb{R}_N[X])$.
 4) L'application $x \mapsto T_n(x) T_m(x)$ est continue sur $[-1, 1]$, elle est donc bornée, on alors :

$$\frac{|T_n(x) T_m(x)|}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{M}{\sqrt{1-x^2}}$$

Or $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}}$, l'application $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ est intégrable sur $] -1, 1[$ car riemannienne d'exposant $\frac{1}{2}$. Par parité, l'application $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $] -1, 1[$, d'où l'application $x \mapsto \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $] -1, 1[$.

$$5) \int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \underset{x=\cos \theta}{=} \int_0^\pi \cos n\theta \cos m\theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos[(m+n)\theta] + \cos[(m-n)\theta]) d\theta$$

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Deuxième Partie.

- 1) L'application $(P|Q) \mapsto \int_{-1}^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ est bien définie (voir méthode du I)4), elle est bilinéaire positive de manière claire. De plus $(P|P) = 0$ entraîne $\forall a \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, $\int_{-a}^a \frac{P^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$, par continuité et positivité, on en déduit que P admet tous les réels de $]-a, a[$ comme racines, donc P est nul. L'application $(P|Q) \mapsto \int_{-1}^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ est un produit scalaire.

2) On pose $Q_p = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_p$, on a $\deg Q_p = p$, donc :

$$\forall p \in \{0, \dots, N\}, \text{Vect}(1, X, \dots, X^p) = \text{Vect}(Q_0, \dots, Q_p).$$

La famille $(Q_p)_{0 \leq p \leq N}$ est orthonormée d'après I)5). D'où $X^p = a_p Q_p + a_{p-1} Q_{p-1} + \dots + a_0 Q_0$.

Or le terme de plus haut degré de Q_p est $2^p \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ d'après I)2b), Donc $a_p = \frac{\sqrt{\pi}}{2^p \sqrt{2}}$ et $(X^p | Q_p) = a_p$.

D'où $\forall p \in \{0, \dots, N\}, (X^p | Q_p) > 0$.

On en déduit que la famille $(Q_p)_{0 \leq p \leq N}$ est la base orthonormée déduite de la base canonique par le procédé de Schmidt.

3) a) On a :

$$\pi_N(P) = \sum_{n=0}^N (P | Q_n) Q_n = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^N (P | T_n) T_n$$

b) On sait que : $d(P, \mathbb{R}_N[X]) = \|P - \pi_N(P)\|$

Or, d'après la propriété de Pythagore, $[d(P, \mathbb{R}_N[X])]^2 = \|P\|^2 - \|\pi_N(P)\|^2$

Donc :

$$[d(P, \mathbb{R}_N[X])]^2 = \|P\|^2 - \sum_{n=0}^N (P | Q_n)^2.$$

Soit :

$$[d(P, \mathbb{R}_N[X])]^2 = \|P\|^2 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^N (P | T_n)^2.$$

4) a) On pose $z = e^{it}$, d'où :

$$(\cos t)^{2N} = \frac{1}{2^{2N}} \left(z + \frac{1}{z} \right)^{2N} = \frac{1}{2^{2N}} \left[\sum_{p=0}^N C_{2N}^p z^p \left(\frac{1}{z} \right)^{2N-p} + \sum_{p=N+1}^{2N} C_{2N}^p z^p \left(\frac{1}{z} \right)^{2N-p} \right]$$

$$(\cos t)^{2N} = \frac{1}{2^{2N}} \left[\sum_{p=0}^N \frac{C_{2N}^p}{z^{2N-2p}} + \underbrace{\sum_{q=0}^{N-1} C_{2N}^p z^{2N-2q}}_{q=2N-p} \right]$$

$$(\cos t)^{2N} = \frac{C_{2N}^N}{2^{2N}} + \frac{1}{2^{2N}} \sum_{q=0}^{N-1} C_{2N}^p \left(z^{2N-2q} + \frac{1}{z^{2N-q}} \right).$$

b) Or, $z^{2N-2q} + \frac{1}{z^{2N-q}} = 2 \cos[(2N-2q)t]$, d'où :

$$(\cos t)^{2N} = \frac{C_{2N}^N}{2^{2N}} + \frac{1}{2^{2N-1}} \sum_{q=0}^{N-1} C_{2N}^q T_{2N-2q}(\cos t)$$

c) On obtient :

$$I_{2N,0} = \int_0^\pi (\cos t)^{2N} dt = \frac{\pi C_{2N}^N}{2^{2N}} + \frac{1}{2^{2N-1}} \sum_{q=0}^{N-1} C_{2N}^q \int_0^\pi \cos [(2N - 2q)t] dt.$$

Or $\int_0^\pi \cos [(2N - 2q)t] dt = 0$ car $q \neq N$, donc :

$$I_{2N,0} = \frac{\pi C_{2N}^N}{2^{2N}}.$$

d) Pour $1 \leq k \leq 2N - 1$,

$$I_{2N,k} = \underbrace{\frac{C_{2N}^N}{2^{2N}} \int_0^\pi \cos kt dt}_{=0} + \frac{1}{2^{2N-1}} \sum_{q=0}^{N-1} C_{2N}^q \underbrace{\int_0^\pi \cos [(2N - 2q)t] \cos kt dt}_{=(T_{2n-2q}|T_k)}$$

Or $(T_{2n-2q}|T_k) = \frac{\pi}{2} \delta_{2N-2q,k}$ d'après I)5).

D'où $I_{2N,k} = 0$ si k est impair. De plus, si k est pair alors :

$$I_{2N,k} = \frac{\pi}{2^{2N}} C_{2N}^{N-\frac{k}{2}}.$$

e) On a : $[d(X^{2N}, \mathbb{R}_{2N-1}[X])]^2 = \|X^{2N}\|^2 - \|\pi_{2N-1}(X^{2N})\|^2$

Or, $\|\pi_{2N-1}(X^{2N})\|^2 = \sum_{n=0}^{2N-1} (X^{2N}|Q_n)^2 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{2N-1} (X^{2N}|T_n)^2$

$$(X^{2N}|T_n) = \int_{-1}^1 \frac{x^{2N} T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi (\cos t)^{2N} \cos nt dt = I_{2N,n}.$$

On obtient, $[d(X^{2N}, \mathbb{R}_{2N-1}[X])]^2 = \|X^{2N}\|^2 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{2N-1} I_{2N,n}^2 = \|X^{2N}\|^2 - \frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{N-1} I_{2N,2l}^2$

$$\|X^{2N}\|^2 = \int_{-1}^1 \frac{x^{4N}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi (\cos t)^{4N} dt = I_{2(2N),0} = \frac{\pi C_{4N}^{2N}}{2^{4N}}.$$

$$[d(X^{2N}, \mathbb{R}_{2N-1}[X])]^2 = \left(\frac{\pi C_{4N}^{2N}}{2^{4N}} \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\frac{\pi}{2^{2N}} C_{2N}^{N-l} \right)^2$$

$$[d(X^{2N}, \mathbb{R}_{2N-1}[X])]^2 = \left(\frac{\pi C_{4N}^{2N}}{2^{4N}} \right) - \frac{\pi}{2^{4N-1}} \sum_{l=0}^{N-1} \left(C_{2N}^{N-l} \right)^2.$$

Troisième Partie .

1) Les questions 1) sont évidentes..

2) a) $h \in E$ car si $x \in [-1, 1]$ alors $\frac{5}{4} + x \neq 0$.

$$\text{b) } \alpha) \tilde{h}(t) = h\left(\frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)\right) = \frac{1}{\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)}.$$

$$\beta) \tilde{h}(t) = \frac{4u}{u^2 + \frac{5}{2}u + 1} = \frac{4u}{(u+2)\left(u + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\text{Or } \frac{4u}{(u+2)\left(u + \frac{1}{2}\right)} = \frac{8}{3(u+2)} - \frac{2}{3\left(u + \frac{1}{2}\right)}.$$

$$\text{Or } \frac{8}{3(u+2)} = \frac{4}{3\left(1 + \frac{u}{2}\right)} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^n}{2^n} \text{ car } \left|\frac{u}{2}\right| = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{2} < 1.$$

$$\frac{2}{3\left(u + \frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3u\left(1 + \frac{1}{2u}\right)} = \frac{2}{3u} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{u^n 2^n}.$$

$$\tilde{h}(t) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^n}{2^n} - \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{u^{n+1} 2^n}$$

$$\text{Or } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{u^{n+1} 2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{u^n 2^{n-1}} = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{u^n 2^n}.$$

Donc :

$$\tilde{h}(t) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^n}{2^n} + \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{u^n 2^n}$$

$$\tilde{h}(t) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \left(u^n + \frac{1}{u^n}\right).$$

$$\tilde{h}(t) = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \cos nt$$

$\gamma)$ La série trigonométrique converge uniformément, donc c'est la série de Fourier de \tilde{h} .

$$\text{c) } \alpha) (h|T_n) = \int_{-1}^1 \frac{h(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \tilde{h}(t) \cos nt dt.$$

Or le coefficient de Fourier de \tilde{h} est $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \tilde{h}(t) \cos nt dt = a_n$ pour $n \geq 1$.

$$(h|T_n) = \frac{\pi}{2} a_n = \frac{\pi}{2} \times \frac{8}{3} \times \frac{(-1)^n}{2^n}.$$

Donc

$$\forall n \geq 1, (h|T_n) = \frac{\pi (-1)^n}{3 \times 2^{n-2}}.$$

$$\frac{1}{\pi} (h|T_0) = a_0, \text{ donc}$$

$$(h|T_0) = \frac{4\pi}{3}$$

$$\beta) [d(h, \mathbb{R}_N[X])]^2 = \|h\|^2 - \sum_{n=0}^N (h|Q_n)^2 = \|h\|^2 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^N (h|T_n)^2$$

d'où :

$$[d(h, \mathbb{R}_N[X])]^2 = \|h\|^2 - \sum_{n=0}^N \left(\frac{\pi}{9 \times 2^{2n-2}}\right).$$

Exercice.

Première Partie.

- 1) On a $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$, d'après le théorème du rang, $\text{rg}(f^2) = \text{rg } f$ entraîne $\dim \text{Ker } f = \dim \text{Ker } f^2$, on en déduit que :

$$\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$$

- 2) $\forall y \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f, \exists x \in E, y = f(x)$ et $f(y) = 0$ d'où, $f^2(x) = 0$, soit $x \in \text{Ker } f^2$ et donc $x \in \text{Ker } f$, on a $y = f(x) = 0$.

D'où, $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$, d'après le théorème du rang on obtient le résultat :

$$\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E.$$

- 3) $\text{Im } f$ est stable par f , on sait que la restriction de f à tout supplémentaire de $\text{Ker } f$ est un isomorphisme sur $\text{Im } f$. Dans une base adaptée à la somme directe $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E$ on obtient la matrice demandée.
- 4) Par récurrence sur $k \geq 1$, on montre que :

$$M^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$$

avec $M^0 = I_n$.

Donc, pour tout polynôme P à coefficient complexe de la forme, $P = \sum_{i=0}^m a_i X^i$, on a :

$$P(M) = \begin{pmatrix} a_0 I_{n-r} & 0 \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

On note χ_A le polynôme caractéristique de la matrice A , le degré de χ_A est égal à r .

$$M \chi_A(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 I_{n-r} & 0 \\ 0 & \chi_A(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 I_{n-r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Le polynôme $M \chi_A$ est annulateur de M et il est de degré $r + 1$.

Deuxième Partie.

- 1) On a $\text{rg } f < \text{rg } f^2$, donc f n'est pas diagonalisable car $\text{rg } f = \text{Card}\{\lambda \neq 0, \lambda \in \text{Sp}(f)\}$.
- 2) On applique le théorème du rang à la restriction de f à $\text{Im } f$, ce qui donne :

$$\dim \text{Im } f = \dim \text{Ker}(f|_{\text{Im } f}) + \dim \text{Im}(f|_{\text{Im } f})$$

$$\text{Or } \begin{cases} \text{Ker}(f|_{\text{Im } f}) = \text{Ker } f \cap \text{Im } f \\ \text{Im}(f|_{\text{Im } f}) = \text{Im } f^2 \end{cases}$$

D'où :

$$\dim \text{Ker } f \cap \text{Im } f = \dim \text{Im } f - \dim \text{Im } f^2$$

$$\dim \text{Ker } f \cap \text{Im } f = r - p.$$

3) On choisit une base $(e_1, e_2, \dots, e_{r-p})$ de $\text{Ker } f \cap \text{Im } f$, on note e'_1, \dots, e'_{r-p} les antécédents respectifs des vecteurs e_1, \dots, e_{r-p} par l'application f .

On complète la famille libre $(e_1, e_2, \dots, e_{r-p})$ par $(e_{r-p+1}, \dots, e_{n-r})$ pour former une base de $\text{Ker } f$. La

famille $(e'_1, \dots, e'_{r-p}, e_1, e_2, \dots, e_{n-r})$ est une famille libre si $\sum_{i=1}^{r-p} \alpha'_i e'_i + \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i e_i = 0$ alors en composant par

f , on obtient $\sum_{i=1}^{r-p} \alpha'_i e_i = 0$ et $\alpha'_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, r-p\}$ car $(e_1, e_2, \dots, e_{r-p})$ est libre.

On en déduit que $\forall i \in \{1, \dots, n-r\}, \alpha_i = 0$.

On complète la famille libre $(e'_1, \dots, e'_{r-p}, e_1, e_2, \dots, e_{n-r})$ en une base B de E , en écrivant la matrice de f dans la base B , on obtient la matrice demandée.

4) Cette question suppose $p \geq 1$ pour que Y_4 ne soit pas nulle, de plus on suppose $Y_1 = 0$.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_{r-p} & 0 & 0 & Y_2 \\ 0 & 0 & 0 & Y_3 \\ 0 & 0 & 0 & Y_4 \end{pmatrix} \text{ et } N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_2 Y_4 \\ 0 & 0 & 0 & Y_3 Y_4 \\ 0 & 0 & 0 & Y_4^2 \end{pmatrix}$$

$$N^2 \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Y_2 Y_4 X_4 \\ Y_3 Y_4 X_4 \\ Y_4^2 X_4 \end{pmatrix} \text{ donc } N^2 \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ et } \dim \text{Ker } N^2 = n-p \text{ or } \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$n-p, \text{ donc } \text{Ker } N^2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Autrement dit ,

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \in \text{Ker } N^2 \text{ si et seulement si } X_4 = 0.$$

Soit X_4 tel que $Y_4 X_4 = 0$ alors $N^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ X_4 \end{pmatrix} = 0$, et donc $X_4 = 0$, la matrice Y_4 est inversible.

5) Il suffit d'écrire le calculs des déterminants par blocs.