

Mathématiques

Durée : 3 heures. - Coefficient : 3

Les exercices sont indépendants.

La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

Notations : $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de dimension 3 sur le corps \mathbb{C} . a, b, c sont des nombres complexes. On note I, J et $M(a, b, c)$ les matrices suivantes

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

On note $j = e^{2i\pi/3}$. $j^2 = \bar{j} = e^{4i\pi/3}$ est une autre racine cubique de l'unité.

Partie I

- I.1. Calculer J^2 et J^3 .
- I.2. Déterminer les valeurs propres de J . La matrice J est-elle diagonalisable sur le corps \mathbb{C} ? L'est-elle sur le corps \mathbb{R} ?
- I.3. Pour chaque valeur propre de J déterminer le vecteur propre associé ayant 1 pour première composante, et une matrice P de passage à une base de vecteurs propres.
- I.4. Exprimer la matrice $M(a, b, c)$ à l'aide des matrices I, J et J^2 . En déduire que $H = \{M(a, b, c) \mid (a, b, c) \in \mathbb{C}^3\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ pour les lois usuelles (somme et loi externe). Précisez la dimension de H .
- I.5. Montrer que les vecteurs propres (complexes) de J sont aussi vecteurs propres de J^2 ainsi que de $M(a, b, c)$. En déduire les valeurs propres de $M(a, b, c)$ à l'aide de celles de J , puis en fonction du nombre complexe j .
- I.6. Montrer que tout élément de H est diagonalisable sur \mathbb{C} . Donner la décomposition de $M(a, b, c)$ en fonction de la matrice P du I.3 et d'une matrice diagonale que l'on explicitera.
- I.7. On suppose ici que les coefficients (a, b, c) sont réels.
 - a) Montrer que toutes les valeurs propres de $M(a, b, c)$ sont réelles si et seulement si $b = c$.
 - b) Déterminer les valeurs propres de $M(a, b, c)$ ainsi que les *sous-espaces propres réels* associés.

Partie II

Soit E un espace vectoriel euclidien réel de dimension 3, de base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note Id l'endomorphisme identité de E . Dans cette partie, on s'intéresse à une étude géométrique des endomorphismes $f_{a,b,c}$ différents de Id dont la matrice relativement à la base \mathcal{B} est $M(a, b, c)$, en supposant que les coefficients (a, b, c) sont réels. Il est recommandé d'utiliser les résultats trouvés dans la première partie.

- II.1. Montrer qu'il existe deux couples (a, b) tels que $f_{a,b,b}$ ait pour seules valeurs propres 1 et -1 . Préciser les sous-espaces propres associés. Donner la nature géométrique de $f_{a,b,b}$ dans les deux cas.
- II.2. Montrer qu'il existe deux couples (a, b) tels que $f_{a,b,b}$ ait pour seules valeurs propres 1 et 0. Préciser les sous-espaces propres associés. Donner la nature géométrique de $f_{a,b,b}$ dans les deux cas.
- II.3.
 - a) À quelles conditions nécessaires et suffisantes une matrice 3×3 à coefficients réels représente-t-elle la matrice dans la base \mathcal{B} d'une rotation?
 - b) Montrer que J et J^2 sont des matrices de rotation de E , préciser le cosinus de leurs angles de rotation.
 - c) Montrer que $f_{a,b,c}$ est une rotation vectorielle si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $a + b + c = 1$. En déduire que $ab + bc + ca = 0$.
Préciser l'axe de rotation ainsi que le cosinus de son angle de rotation en fonction de (a, b, c) .

Exercice 2

Dans ce qui suit, la fonction f est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

On considère les équations différentielles, de fonction inconnue f en la variable réelle x

$$(E_1) \quad f'(x) + xf(x) = 0$$

$$(E_2) \quad f'(x) + xf(x) = x^3$$

1. Donner la solution générale de (E_1) et l'unique solution f_0 telle que $f_0(0) = 1$.

2. Donner la solution générale de (E_2) , et la fonction f_1 solution de (E_2) et telle que $f_1(0) = 0$.

Dans la suite de l'exercice, on pose $F(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ et on note $I(R) = \int_0^R e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

3. a) Montrer que $A = \int_0^\infty F(t) dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} I(R)$ existe.
- b) Soit $J(R) = \iint_C F(x)F(y) dx dy$ avec $C = [0, R] \times [0, R] = [0, R]^2$.
Exprimer $J(R)$ en fonction de $I(R)$.
- c) Soit $K(R) = \iint_D F(x)F(y) dx dy$ avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x^2 + y^2 \leq R^2\}$.
Montrer que pour tout R positif, on a $K(R) \leq J(R) \leq K(R\sqrt{2})$.
- d) Calculer la valeur de $K(R)$ par passage en coordonnées polaires. Calculer $\lim_{R \rightarrow +\infty} K(R)$ et en déduire que $A = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
4. On considère la fonction $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt)F(t) dt$.
- a) Justifier l'existence de $g(x)$.
- b) En admettant que l'on peut dériver sous l'intégrale, démontrer que g est solution de (E_1) . [On transformera l'expression trouvée pour $g'(x)$ à l'aide d'une intégration par parties].
- c) En déduire l'expression de $g(x)$ en fonction de $F(x)$.
5. Donner le développement en série entière (et le rayon de convergence) de $G(x) = \int_0^x F(t) dt$.

Exercice 3

$P(z) = (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)$ est un polynôme de degré 3 dont les racines complexes a_1, a_2, a_3 sont distinctes. On note b_1, b_2 les racines du polynôme $P'(z)$, dérivé de $P(z)$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les points A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 sont les points d'affixes respectives a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 .

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{P'(z)}{P(z)}$.
2. En déduire que $\sum_{k=1}^3 \frac{1}{(b_1 - a_k)} = 0$. Que peut-on écrire pour b_2 ?
3. En déduire que $\sum_{k=1}^3 \lambda_k \overrightarrow{A_k B_1} = \vec{0}$ pour des coefficients λ_k réels à préciser, et que le point B_1 est à l'intérieur du triangle (A_1, A_2, A_3) [On rappelle que le barycentre de trois points dont les coefficients sont strictement positifs est intérieur au triangle défini par ces trois points]. Que peut-on dire de B_2 ?
4. Calculer le coefficient de z dans $P'(z)$ à l'aide de a_1, a_2, a_3 , et en déduire que le point G , centre de gravité du triangle (A_1, A_2, A_3) est le milieu du segment $[B_1, B_2]$.
5. On se propose de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les points B_1, B_2 associés au triangle (A_1, A_2, A_3) soient confondus.
- a) On suppose pour commencer que le centre du gravité G du triangle (A_1, A_2, A_3) est à l'origine. Que peut-on en déduire pour le coefficient de z^2 dans $P(z)$? Démontrer que dans ce cas on a $B_1 = B_2$ si et seulement si (A_1, A_2, A_3) est équilatéral de cercle circonscrit de centre O .
- b) En déduire une propriété analogue dans le cas général.
6. On se propose de montrer que les angles de vecteurs $(\overrightarrow{A_1 A_3}, \overrightarrow{A_1 B_1})$ et $(\overrightarrow{A_1 B_2}, \overrightarrow{A_1 A_2})$ sont égaux.
- a) Montrer que $3(z - b_1)(z - b_2) = (z - a_1)(z - a_2) + (z - a_2)(z - a_3) + (z - a_3)(z - a_1)$ pour tout nombre complexe z .
- b) Montrer que $3(a_1 - b_1)(a_1 - b_2) = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)$, puis que les arguments des nombres complexes $\frac{b_1 - a_1}{a_3 - a_1}$ et $\frac{a_2 - a_1}{b_2 - a_1}$ sont égaux (à 2π près).
- c) En déduire l'égalité des angles $(\overrightarrow{A_1 A_3}, \overrightarrow{A_1 B_1})$ et $(\overrightarrow{A_1 B_2}, \overrightarrow{A_1 A_2})$. Donner par la même méthode deux autres égalités angulaires.
- d) Si dans le triangle (A_1, A_2, A_3) le point B_1 est connu, donner une construction géométrique du point B_2 .