CONCOURS ESIM Entrepreneur Industrie - Session 2002

Filière PC

EPREUVE DE MATHEMATIQUES I

Durée : 3 heures
Calculatrices interdites

La présentation et la rigueur de la rédaction seront des éléments importants dans l'appréciation des copies.

I

1) Etudier la variation de $\lambda : t \to \frac{\sin t}{t}$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

2) En déduire: $\frac{2}{\pi} \leq \int_0^{\pi} \frac{2}{t^2} \sin^2(\frac{t}{2}) dt \leq \frac{\pi}{2}$.

3) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ existe. On note I cette valeur.

4) a) Pour $x \in \left]0, \pi\right[$, on pose $S_n(x) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$. Donner la valeur de $S_n(x)$ en fonction de n et x .

b) Calculer $J_n = \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt.$

5) a) Soit la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $\varphi(0) = 0; \varphi(x) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{x}$ *si* $0 < x \leq \pi$.

Montrer que φ est de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

b) Donner la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} \cancel{\chi}(t) \sin \frac{(2n+1)t}{2} dt.$

φ

Tournez la page S.V.P.

6) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi \frac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}}{t}dt$. En déduire la valeur de I.

II

Soit L^1_{cm} l'ensemble des fonctions à valeurs dans **C** continues par morceaux et intégrables sur **R**. Si $f \in L^1_{cm}$ on note $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)dt.$ On l'appelle la transformée de Fourier de f.

On note $\Im$ l'espace des fonctions complexes sur **R** de classe C^∞ telles que :

$$\forall (p,q) \in N^2 \lim_{|x|\to+\infty} x^p f(x)^{(q)} = 0 .$$

1) Vérifier que $\Im$ est un espace vectoriel.

2) Montrer que si $\phi \in \Im$, alors $\forall\ (p,m,i) \in N^3$, $x^p \phi^{(m)}(x)$ est bornée et intégrable sur **R**, ainsi que $(x^i\phi(x))^{(m)}$.

3) Montrer que si $\phi \in \Im$, alors $\hat{\phi}$ est de classe C^1 et que sa dérivée $(\hat{\phi})'$ est la transformée de Fourier d'une fonction de $\Im$. En déduire que si $f \in \Im$, alors $\hat{f} \in C^\infty$.

III

Si g et h sont à valeurs complexes , intégrables et de carrés intégrables sur **R** , on pose

$$\langle g,h \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{g(x)}h(x)dx. \text{ On admet le résultat } \Theta : \left\langle \hat{g},\hat{h} \right\rangle = 2\pi\langle g,h\rangle .$$

1) On note g : **R**$\to$ **R** définie par $g(t) = \frac{1}{2} si\ \ t \in [-1,1]$ et nulle ailleurs. Calculer $\hat{g}(x)$.

2) Soit $m \in N$. On définit la fonction f par : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

a) Montrer que f est développable en série entière sur **R.**

b) Monter que $f^{(m)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)^m e^{-ixt} g(t) dt$.

c) Calculer, suivant la parité de m, la valeur de $f^{(m)}(0)$.

3) Si $m \in N$, calculer à l'aide de la formule de Leibniz $f^{(m)}(x)$.

4) Si $(m,n) \in N^2$ et $m+n$ est pair, montrer, à l'aide de Θ, que:

$$2\int_0^{+\infty} f^{(m)}(x) f^{(n)}(x) dx = \frac{(-1)^{n+\frac{m+n}{2}} \pi}{m+n+1}$$

5) Si $(m,k) \in N^2$, montrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} f^{(m)}(x) f^{(m+2k+1)}(x) dx = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j+1} f^{(m+j)}(0) f^{(m+2k-j)}(0) + (-1)^k \int_0^{+\infty} f^{(m+k)}(x) f^{(m+k+1)}(x) dx.$$
