CONCOURS ESIM Entrepreneur Industrie - Session 2002

Filière PSI

EPREUVE DE MATHEMATIQUES I

Durée : 3 heures
Calculatrices autorisées

L'épreuve comporte deux problèmes 1 et 2 totalement indépendants.

Problème 1

Soit p et q deux entiers naturels non nuls vérifiant : $p \leq q$.

Préliminaire

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels.

On pose $\Delta u_n = u_n - u_{n+1}$ et pour $n \geq p$ $\quad S_n = \sum_{k=p}^{n} v_k$.

a) Montrer que : $\displaystyle\sum_{n=p}^{q} u_n v_n = \sum_{n=p}^{q-1} (\Delta u_n) S_n + S_q u_q$

(On écrira $v_n = S_n - S_{n-1}$ pour $n > p$)

b) Soit $M \in \mathbb{R}$ On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante à termes positifs et que : $\forall n \geq p \quad |S_n| \leq M$.

Montrer alors que : $\left| \sum_{n=p}^{q} u_n v_n \right| \leq M u_p \qquad (*)$

(On remarquera que : $\Delta u_n \geq 0$.)

1) a) Montrer que pour tout $x \in [0,\pi/2]$ $\sin(x) \geq (2/\pi)\, x$.

1) b) Déterminer λ , μ , a , b en fonction de p et de ~~x~~ n tels que :

$$\sum_{k=p}^{n} e^{ikx} = e^{i\lambda x} \frac{\sin(\mu x)}{\sin(x/2)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{\sin(x/2)}$$

1) c) On suppose que $x \in]0,\pi]$. Montrer que $\left| \sum_{k=p}^{n} \sin(kx) \right| \leq \frac{K}{x}$ où K est une constante à déterminer.

Tournez la page S.V.P.

Soit A un réel positif ; soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs décroissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad c_n \leq \frac{A}{n}$$

et soit f la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx)$.

2) a) Soit $x \in]0,\pi]$. En utilisant l'inégalité $(*)$ et celle du **1) c)** majorer $\left| \sum_{n=p}^{q} c_n \sin(nx) \right|$ en fonction de A, de p et de x.

2) b) En déduire que la fonction f est définie et continue sur $]0,\pi[$, puis sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

3) a) Soit x appartenant à $\left[0,\frac{\sqrt{\pi}}{q}\right] \cup \left]\sqrt{\pi},\pi\right]$. Majorer $\left| \sum_{n=1}^{q} c_n \sin(nx) \right|$ par une constante ne dépendant que de A (on utilisera l'inégalité $|\sin(u)| \leq |u|$ pour le premier intervalle et **2) a)** pour le second).

3) b) Soit x appartenant à $\left]\frac{\sqrt{\pi}}{q},\sqrt{\pi}\right]$.

En écrivant: $$\sum_{n=1}^{q} c_n \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\left[\frac{\sqrt{\pi}}{x}\right]} c_n \sin(nx) + \sum_{n=\left[\frac{\sqrt{\pi}}{x}\right]+1}^{q} c_n \sin(nx).$$

majorer $\left| \sum_{n=1}^{q} c_n \sin(nx) \right|$ par $2A\sqrt{\pi}$.

3) c) En conclure qu'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in [0,\pi], \forall q \in \mathbb{N}^* \qquad \left| \sum_{n=1}^{q} c_n \sin(nx) \right| \leq B .$$

3) d) En énonçant précisément le théorème utilisé, montrer que f est intégrable sur $[0,\pi]$ et que les c_n sont les coefficients de Fourier de f.

Problème 2

On rappelle que $\operatorname{ch} t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$.

Soit λ un réel. On considère la fonction f_λ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe :

$$f_\lambda(x) = \int_0^{\infty} [\operatorname{ch}(\lambda t)]\, e^{-x \operatorname{ch} t} dt$$

A

1) a) Montrer que f_λ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1) b) Montrer que f_λ vérifie l'équation différentielle : $x^2 y'' + x y' - (x^2 + \lambda^2) y = 0$.

2) Soit g_λ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $g_\lambda(x) = \int_0^{\infty} e^{(-t-\frac{x^2}{4t})} t^{-\lambda-1}\, dt$.

a) Déterminer suivant la valeur de λ le domaine de définition de g_λ ?

b) i) Montrer que $f_\lambda(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\,\mathrm{ch}t} e^{\lambda t}\, dt$.

b) ii) En faisant les changements de variable successifs : $u = e^t$ puis $v = \frac{x}{2u}$, montrer que pour tout $x > 0$: $f_\lambda(x) = a_\lambda(x)\, g_\lambda(x)$ où a_λ est une fonction à déterminer.

c) Montrer que pour $\lambda < 0$ g_λ est continue en 0 . En déduire un équivalent pour $\lambda < 0$ de $f_\lambda(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, puis un équivalent de $f_\lambda(x)$ (pour $\lambda \neq 0$) quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

B

On suppose désormais $|\lambda| < 1$.

Si φ est une fonction continue de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, on note $I(\varphi)$ (quand il existe) le nombre $I(\varphi) = \sup\limits_{\substack{A \in \mathbb{R}^+ \\ B \in \mathbb{R}^+}} \int_0^A \int_0^B \varphi(x,y)\,dx\,dy$.

Soit alors ψ_λ la fonction de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ qui à (t,x) associe $\psi_\lambda(t,x) = e^{-x\,\mathrm{ch}t}\,\mathrm{ch}(\lambda t)$.

3) a) Calculer $\int_0^{\infty} \psi_\lambda(t,x)\,dx$.

3) b) En déduire que $I(\psi_\lambda)$ existe.

4) a) i) Pour $|u| < 1$ développer en série entière $\frac{1}{1+u}$.

4) a) ii) En considérant alors l'égalité $\frac{1}{\mathrm{ch}t} = \frac{2\,e^{-t}}{1+e^{-2t}}$.

montrer que pour $t > 0$ $\frac{\mathrm{ch}\lambda t}{\mathrm{ch}t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n(t)$ où les u_n sont des fonctions à préciser.

4) b) On pose $v_p = u_{2p} - u_{2p+1}$. Montrer que v_p est à valeurs positives et que $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{ch}(\lambda t)}{\mathrm{ch}(t)}\,dt = K \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 - \lambda^2}$ où K est une constante à déterminer. (On énoncera avec précision les théorèmes utilisés.)

4) c) Développer en série de Fourier la fonction h_λ 2π périodique telle que : $\forall\, t \in\,]-\pi,\pi]$ $h_\lambda(t) = \sin(\lambda t)$.

4) d) Déduire de ce qui précède la valeur de $I(\psi_\lambda)$.

Fin de l'énoncé