CONCOURS ESIM Entrepreneur Industrie - Session 2001

Filières PC,PSI

EPREUVE DE MATHEMATIQUES II

Durée : 3 heures

Calculatrice interdite

Dans tout le problème n et p désignent deux entiers supérieurs ou égaux à 2 et $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

- On note $\mathbf{M}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{K}$.
- On identifiera $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, l'ensemble des matrices colonnes d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{K}$.
- Si M est une matrice, $m_{i,j}$ désigne le coefficient d'indice (i,j) de M et $C_j(M)$ désigne la j-ème colonne de cette matrice.
- Si $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K})$, $rg(A)$ désigne le rang de A.
- On définit pour :
  - $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbf{K}^n$ et $Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \in \mathbf{K}^p$, $X{\cdot}Y=\begin{bmatrix} x_1 Y \\ \vdots \\ x_n Y \end{bmatrix} \in \mathbf{K}^{np}$;
  - $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K})$, $B \in \mathbf{M}_p(\mathbf{K})$, $A * B$ la matrice carrée d'ordre np, dont la représentation par blocs carrés d'ordre p est :

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \cdots & a_{1,n}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \cdots & a_{2,n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & a_{n,2}B & \cdots & a_{n,n}B \end{bmatrix}$$

Par exemple si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ alors $A*B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- Si $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K})$, on note $Sp_{\mathbf{K}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbf{K}$ i.e. l'ensemble des racines dans $\mathbf{K}$ du polynôme caractéristique de A.

- Si $u_1, \dots, u_p$ sont des vecteurs d'un $\mathbf{K}$ espace vectoriel E, on note $\mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(u_1, \dots, u_p)$ le sous espace vectoriel de E engendré par la famille $(u_1, \dots, u_p)$.

- Si X est une matrice colonne, $\overline{X}$ désigne la matrice colonne dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de X.

Tournez la page S.V.P.

Partie I

1. Montrer que : $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K})$, $\forall B \in \mathbf{M}_p(\mathbf{K})$, $A * B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$.

2. **a.** Montrer que : $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K})$, $\forall B \in \mathbf{M}_p(\mathbf{K})$, $\forall X \in \mathbf{K}^n$, $\forall Y \in \mathbf{K}^p$,
$$(A*B).(X*Y) = (A.X)*(B.Y) .$$
b. De même, montrer que : $\forall (A,A') \in (\mathbf{M}_n(\mathbf{K}))^2$, $\forall (B,B') \in (\mathbf{M}_p(\mathbf{K}))^2$,
$$(A*B).(A'*B') = (A.A')*(B.B') .$$

3. Montrer que: $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K})$, $\forall B \in \mathbf{M}_p(\mathbf{K})$, $A*B$ est nilpotente si et seulement si A ou B l'est.

4. **a.** On suppose que $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K})$ et $B \in \mathbf{M}_p(\mathbf{K})$ sont inversibles. Montrer que $A*B$ est inversible et préciser son inverse en fonction de A^{-1} et B^{-1} .

b. Montrer que $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

5. On note $J_n(r)$ la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux qui valent 1.
a. Montrer que $rg[(J_n(r))*(J_p(s))] = rs$.
b. On suppose que $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K})$ et $rg(A) = r$, et $B \in \mathbf{M}_p(\mathbf{K})$, $rg(B) = s$.
Montrer que $rg(A*B) = rs$.
c. En déduire que $A*B$ inversible implique A et B inversibles.

6. On note $(U_1, \dots, U_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$ et $(V_1, \dots, V_p)$ la base canonique de $\mathbf{K}^p$.
a. Montrer que $\boldsymbol{B} = (U_1*V_1, \dots, U_1*V_p, \dots, U_n*V_1, \dots, U_n*V_p)$ est la base canonique de $\mathbf{K}^{np}$
b. Etablir que : $\forall i \in \{1,\dots,n\}, \forall j \in \{1,\dots,p\}$,
$$(A*B)(U_i*V_j) = \sum_{l=1}^{p} b_{l,j}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}(U_k*V_l)\right).$$
En déduire la matrice associée à $A*B$ dans la base $\boldsymbol{B}' = (U_1*V_1, \dots, U_n*V_1, \dots, U_1*V_p, \dots, U_n*V_p)$.
c. Montrer qu'il existe une matrice carrée P d'ordre np, orthogonale, telle que :
$$B*A = {}^tP(A*B)P .$$

Partie II

On considère 2 matrices carrées, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K})$ et $B \in \mathbf{M}_p(\mathbf{K})$.

1. **a.** On considère X un vecteur propre de A pour la valeur propre λ et Y un vecteur propre de B pour la valeur propre μ. Montrer que $\lambda\mu$ est une valeur propre de $A*B$ et préciser un vecteur propre associé à cette valeur propre.

b. On suppose que A et B sont diagonalisables. Montrer que $A*B$ est diagonalisable et déterminer une base de vecteurs propre de $A*B$ en fonctions d'une base de vecteurs propres de A et d'une base de vecteurs propres de B.

c. *exemple* : montrer que $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres et ses sous espaces propres.

2. On suppose dans cette question que $A * B$ est diagonalisable et que $Sp_{\mathbf{K}}(A)$ contient une valeur non nulle.
- Soit $\lambda \in Sp_{\mathbf{K}}(A)$ et U un vecteur propre pour la valeur propre λ.
- On note $U * \mathbf{K}^p$ le sous espace vectoriel de $\mathbf{K}^{np}$ formé des vecteurs de la forme $U * Y$ pour $Y \in \mathbf{K}^p$.

a. Montrer que $U * \mathbf{K}^p$ est un sous espace vectoriel de $\mathbf{K}^{np}$ stable par $A * B$.
b. En choisissant λ convenablement, en déduire que B est diagonalisable.

On suppose désormais que $A * B$ est diagonalisable et non nulle.

3. On suppose dans cette question que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Montrer que l'on a alors A et B diagonalisables.

On suppose désormais que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$, $B \in \mathbf{M}_p(\mathbf{R})$.
On rappelle que $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ est naturellement inclus dans $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$.

4. Montrer que si l'une des deux matrices A ou B est diagonalisable alors l'autre l'est aussi.

5. On suppose dans cette question que A et B ne sont pas diagonalisables.
- on note, S la matrice $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et si p est un entier naturel non nul, 0_p la matrice nulle carrée d'ordre p.

a. Montrer que toute valeur propre complexe non nulle de A ou de B n'appartient pas à $\mathbf{R}$.

b. Soit $\lambda \in Sp_{\mathbf{C}}(A)$ et $\mu \in Sp_{\mathbf{C}}(B)$ non nulles. Montrer que $\lambda\mu \in \mathbf{R}$ et $\lambda\overline{\mu} \in \mathbf{R}$. En déduire que λ^2 et μ^2 sont des nombres réels.

c. Soit $\alpha \in \left]0,+\infty\right[$ tel que $i\alpha \in Sp_{\mathbf{C}}(A)$ et X un vecteur propre associé. Montrer que $\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}[(X+\overline{X}), i(X-\overline{X})]$ est un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ stable par A. Quelle est la matrice de l'endomorphisme induit par A dans la base $((X+\overline{X}), i(X-\overline{X}))$ de $\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}[(X+\overline{X}), i(X-\overline{X})]$?

d. Montrer qu'il existe un couple d'entiers naturels non nuls (r,s) et $(\alpha_1,\dots,\alpha_r) \in \left(\left]0,+\infty\right[\right)^r$, $(\beta_1,\dots,\beta_s) \in \left(\left]0,+\infty\right[\right)^s$ tels que :

$$A \text{ est semblable à } \begin{bmatrix} \alpha_1 S & & & \\ & \ddots & (0) & \\ & (0) & \alpha_r S & \\ & & & 0_{n-2r} \end{bmatrix} \text{ et } B \text{ semblable à } \begin{bmatrix} \beta_1 S & & & \\ & \ddots & (0) & \\ & (0) & \beta_s S & \\ & & & 0_{p-2s} \end{bmatrix}.$$

En déduire que A et B sont semblables à des matrices antisymétriques.

6. Montrer que : $\forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$, $\forall N \in \mathbf{M}_p(\mathbf{R})$, ${}^t(M*N) = ({}^tM)*({}^tN)$.

7. On suppose que M et N sont des matrices carrées à coefficients réels, non nulles, semblables à des matrices antisymétriques.

a. Montrer qu'elles ne sont pas diagonalisables (on pourra montrer qu'elles ne possèdent pas de valeurs propres non nulles)

b. Etablir que $M*N$ est diagonalisable.

Fin de l'énoncé