CONCOURS ESIM Entrepreneur Industrie - Session 2001

Filière PC

EPREUVE DE MATHEMATIQUES 1 - ANALYSE

Durée : 3 heures
Calculatrice autorisée

La présentation et la rigueur des solutions seront deux éléments importants dans l'appréciation des copies. En particulier, les candidats sont priés d'énoncer avec précision les hypothèses des théorèmes utilisés.
L'usage des calculatrices est autorisé.

Notations

On considère $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels appartenant à l'intervalle $]-1,1[$ et on note
$p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k)$.

Si la suite (p_n) converge on désigne sa limite par $\prod_{k=1}^{+\infty}(1+u_k)$.

Partie I

1. On suppose que pour tout $n \geq 1$, $u_n \in [0,1[$. Montrer que (p_n) converge si et seulement si $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge .

2. On suppose que pour tout $n \geq 1$, $u_n \in]-1,0]$.
   a) Que peut-on dire de (p_n) si $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge ? (On pourra commencer par le cas où (u_n) a pour limite 0.)
   b) Montrer que (p_n) converge vers un réel strictement positif si et seulement si $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

Tournez la page S.V.P.

3. Etudier la convergence et calculer la limite de (p_n) dans les cas suivants:

a) $u_n = -\dfrac{1}{n+1}$

b) $u_n = -\dfrac{1}{(n+1)^2}$

c) $u_n = -\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$

Partie II

Dans cette partie on considère la fonction g définie sur **R** par :

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = \dfrac{chx}{shx} - \dfrac{1}{x} \text{ pour } x \neq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur **R** .

2. Calculer $\int_0^x g(t)dt$ pour tout réel x .

3. Soit α un nombre réel et h la fonction 2π - périodique sur **R** qui coïncide avec $t \mapsto e^{-\alpha t}$ sur $[0,2\pi[$.

   En utilisant la série de Fourier de h démontrer l'égalité :

$$g(\alpha\pi) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2}$$

4. *Application 1 :*

   Exprimer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(\alpha t)}{e^t - 1} dt$ à l'aide de $g(\alpha\pi)$.

5. *Application 2* :

   Prouver la convergence de la suite $\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \dfrac{1}{k^2}\right)$ et déterminer sa limite.

Partie III

On définit la fonction F_n pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $F_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^x)^n}$

1. a) Quel est l'ensemble de définition de F_n ?

   b) Quelle est la nature de la série de terme général $F_n(x)$ pour $x > 1$? (On énoncera avec précision le théorème utilisé)

2. Dans la suite du problème $x = 3$ .On posera $I_n = F_n(3)$

   a) Calculer I_1

   b) Montrer que $I_{n+1} = (1 - \frac{1}{3n}) I_n$

3. Quelle est la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$?

4. *Recherche d'un équivalent de* I_n : On pose $v_n = \sqrt[3]{n}\, I_n$.

   a) Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \ln \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

   b) En déduire la convergence de la suite $\ln v_n$. Si on note L sa limite montrer qu'il existe un réel A tel que :

$$\prod_{k \geq 1}^{n} (1 - \frac{1}{3k}) \sim \frac{A}{\sqrt[3]{n}}$$

   Exprimer A en fonction de L.

Fin de l'énoncé