

## CONCOURS ESIM Entrepreneur Industrie - Session 2001

---

**Filière PSI**


---

**EPREUVE DE MATHÉMATIQUES I**

Durée : 3 heures  
Calculatrices autorisées

---

L'épreuve comporte deux problèmes, 1 et 2, totalement indépendants.

**PROBLEME 1**

Soit 3 fonctions  $a, b, c$  appartenant à  $C^0([0,1], \mathbb{R})$ .

Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels.

On note (P) le problème suivant:

$$\left\langle \begin{array}{l} \text{Trouver } f \text{ appartenant à } C^2([0,1], \mathbb{R}) \text{ telle que :} \\ \forall x \in [0,1] \quad f''(x) = a(x)f(x) + b(x)f'(x) + c(x) \quad \text{avec } f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta \end{array} \right\rangle$$

**Partie A**

A-1) Justifier l'existence et l'unicité de  $g$  appartenant à  $C^2([0,1], \mathbb{R})$  telle que:

$$\forall x \in [0,1] \quad g''(x) = a(x)g(x) + b(x)g'(x) \quad \text{avec } g(0) = 0 \text{ et } g'(0) = 1$$

et l'existence et l'unicité de  $h$  appartenant à  $C^2([0,1], \mathbb{R})$  telle que:

$$\forall x \in [0,1] \quad h''(x) = a(x)h(x) + b(x)h'(x) + c(x) \quad \text{avec } h(0) = \alpha \text{ et } h'(0) = 0.$$

A-2) Montrer que si  $f$  est solution de (P) alors il existe  $\lambda$  appartenant à  $\mathbb{R}$  tel que  $f = h + \lambda g$ .

A-3) Montrer alors que si  $g(1)$  est différent de 0, (P) admet une unique solution.

A-4) Soit l'équation (E) définie par:

$$\forall x \in [0,1] \quad y''(x) = -(1 + \pi^2)y(x) + 2y'(x) + x$$

A-4-a) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) (on détaillera les calculs).

A-4-b) Existe-t-il des solutions  $y$  de (E) telles que  $y(0) = 1$  et  $y(1) = 2$  ?

**Partie B**

B-1) Soit  $f$  appartenant à  $C^1([0,1], \mathbb{R})$  avec  $f(0) = f(1) = 0$ .

B-1-a) Montrer qu'il existe une fonction  $q$  continue sur  $]0,1[$  telle que pour tout  $x$  appartenant à  $]0,1[$  :

$$q(x) = \frac{f(x)}{\sin(\pi x)}$$

B-1-b) On suppose dans cette question que  $q$  appartient à  $C^1([0,1], \mathbb{R})$

B-1-b-1) Calculer  $\int_0^1 q(x)q'(x)\sin(2\pi x)dx$  en fonction de  $\int_0^1 [q(x)]^2 \cos(2\pi x)dx$

**Tournez la page S.V.P.**

**B-1-b-2)** Montrer alors que:

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 [f(x)]^2 dx$$

**B-1-c)** Montrer que l'inégalité précédente reste vraie si q n'appartient pas à  $C^1([0,1], \mathbb{R})$ .

**B-2)** On suppose dans cette question que pour tout x appartenant à  $[0,1]$   $b(x) = 0$  et que pour tout x appartenant à  $[0,1]$   $a(x) > -\pi^2$

Montrer alors que le problème (P) admet une unique solution .

( on considèrera  $\int_0^1 g''(x)g(x)dx$  et on intégrera par parties, g étant la fonction définie au A-1)

### PROBLEME 2

Les deux parties, A et B, du problème 2 sont indépendantes.

#### Partie A

Soit E l'ensemble des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et de carré intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

Pour f appartenant à E, on pose:

$$\|f\| = \left[ \int_{\mathbb{R}} [f(x)]^2 dx \right]^{1/2} \text{ et on définit g par } g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \text{ pour } x \in \mathbb{R}^* \text{ et } g(0) = f(0)$$

(on rappelle que  $f \rightarrow \|f\|$  est une norme sur E).

**A-1)** Montrer que g est continue sur  $\mathbb{R}$

**A-2)** Montrer que:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_0^x g^2(t)dt = 2 \int_0^x f(t)g(t)dt + P(x) g^2(x)$$

où P(x) est un polynôme en x à déterminer.

**A-3)**

**A-3-a)** Dédurre de la question précédente que pour  $x \geq 0$  :

$$\left[ \int_0^x g^2(t)dt \right]^{1/2} \leq 2 \left[ \int_0^{+\infty} f^2(t)dt \right]^{1/2}$$

**A-3-b)** Montrer que g appartient à E et que  $\|g\| \leq 2\|f\|$

**A-4)** On note T l'application de E dans E définie par  $T(f) = g$ .

Pour tout  $\alpha$  positif on définit  $f_\alpha$  par  $f_\alpha(x) = \text{Inf}(1, |x|^{-\alpha})$  pour  $x \in \mathbb{R}^*$  et  $f_\alpha(0) = 1$

**A-4-a)** Pour quelles valeurs de  $\alpha$   $f_\alpha$  appartient-elle à E?

**A-4-b)** Pour ces valeurs calculer  $\|f_\alpha\|$

**A-4-c)** Calculer  $\|T(f_\alpha)\|$

A-4-d) On note  $\|T\|$  la borne supérieure de l'ensemble  $\left\{ \frac{\|T(f)\|}{\|f\|}, f \in E, f \neq 0 \right\}$ . Calculer  $\|T\|$ .

**Partie B**

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite de nombres réels telle que la série de terme général  $u_n^2$  converge, c'est à dire telle

que  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 < +\infty$

On pose :

$$v_n = \frac{\sum_{k=1}^n u_k}{n}$$

et pour toute suite  $(a_n)_{n \geq 1}$

$$\Delta a_n = a_n - a_{n-1} \text{ pour } n \geq 2 \text{ et } \Delta a_1 = a_1$$

B-1) Calculer  $v_n^2 + \Delta(n v_n^2) + (n-1)(\Delta v_n)^2$  en fonction de  $u_n, v_n, v_{n-1}$  puis en fonction de  $u_n$  et  $v_n$ .

B-2) En déduire que

$$\left( \sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 \right)^{1/2} \leq 2 \left( \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 \right)^{1/2}$$

---

Fin de l'énoncé