Filière PSI

EPREUVE DE MATHEMATIQUES I - ANALYSE

Durée : 3 heures

L'usage des calculatrices est autorisé.

Notations et définitions :

R désigne l'ensemble des nombres réels. R^{*+} désigne l'ensemble des réels strictement positifs et R^{*-} désigne l'ensemble des réels strictement négatifs. N désigne l'ensemble des nombres entiers naturels.
On dit qu'une fonction est de classe C^p sur un intervalle I, si elle admet sur I des dérivées continues jusqu'à l'ordre p.
Soit $a \in R$.

Le but de ce problème est l'étude des solutions des équations différentielles :

E_a : $x\,y'' + 2\,y' + a\,x\,y = 0$. F_a : $x\,y'' + y' + a\,x\,y = 0$.

I

Etude des solutions de E_a.

1) On considère la fonction φ définie sur R par : $\varphi(x) = \dfrac{\text{sh}(x)}{x}$ si $x \neq 0$, $\varphi(0) = 1$.

   a) Montrer que cette fonction est C^∞ sur R.

   b) Montrer qu'il existe une fonction ψ définie sur R^+ et C^∞ sur R^+ telle que : pour tout réel x, $\varphi(x) = \psi(x^2)$.

2) On considère la fonction θ définie sur R par : $\theta(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$, $\theta(0) = 1$.

   a) Montrer que cette fonction est C^∞ sur R.

   b) Montrer qu'il existe une fonction ω définie sur R^+ et C^∞ sur R^+ telle que : pour tout réel x, $\theta(x) = \omega(x^2)$.

3) a) Si **f** est solution de E_a sur un intervalle I tel que $0 \notin I$, trouver une équation différentielle vérifiée sur I par la fonction **g** définie sur I par : $\mathbf{g}(x) = x\,\mathbf{f}(x)$.

   b) En déduire les solutions de E_a sur R^{*+}
   En déduire les solutions de E_a sur R^{*-}.

   c) En déduire les solutions de E_a sur R.
   On exprimera ces solutions à l'aide des fonctions θ et φ.

Tournez la page S.V.P.

d) Montrer que pour tout $a \in R$, E_a admet une solution y_o et une seule, telle que : $y_o(0) = 1$.

4) a) Soit k un réel strictement positif. Trouver les fonctions $\mathbf{u}$ de classe C^2 sur R^{*+} telles que la fonction F définie sur $R^3\backslash\{(0,0,0)\}$ par :
$F(x,y,z) = \mathbf{u}\,(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ vérifie :

$$\frac{\partial^2(F)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(F)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(F)}{\partial z^2}+k^2\,F=0 \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} F(x,y,z) = 1.$$

b) Montrer que la fonction F obtenue au a) est C^∞ sur R^3 .

II

Etude des solutions de F_a .

1) Trouver les solutions de F_o sur R^{*+}
Trouver les solutions de F_o sur R^{*-}.

2) Trouver les solutions de F_a développables en série entière au voisinage de l'origine.

3) Montrer que pour tout $a \in R$ il existe une solution de F_a et une seule, notée $\mathbf{g}_a$, développable en série entière et telle que $\mathbf{g}_a(0) = 1$.

4) On considère la fonction Λ définie sur R par : $\Lambda(x) = \int_0^\pi \cos(x\cos t)\,dt$.

a) Montrer que Λ est C^∞ .

b) Calculer, pour $n \in N$, la valeur de $I_n = \int_0^\pi (\cos(t))^{2n}\,dt$.

c) Montrer que Λ est développable en série entière et trouver le développement en série entière de Λ .

d) Quelle relation y a-t-il entre Λ et $\mathbf{g}_1$?

III

Etude du comportement à l'infini des solutions de F_1 .

1) Soit $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ deux fonctions définies et continues sur $]\,0\,,\infty\,[$. On suppose de plus que $\mathbf{f}$ est C^1 sur $]\,0\,,\infty\,[$, que $\mathbf{g}$ est bornée sur $]\,0\,,\infty\,[$ et que :
pour tout $x > 0$, $x^2\,\mathbf{f}\,'(x) = \mathbf{g}(x)$. (1)
Montrer que $\mathbf{f}$ admet une limite finie λ lorsque x tend vers plus l'infini. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$: $x\,(\,\mathbf{f}\,(x) - \lambda\,)$ est bornée sur $[\,\varepsilon, \infty\,[$.

2) Montrer que le résultat reste vrai si on remplace (1) par : $x^2\,\mathbf{f}\,'(x) = \mathbf{f}(x)\,\mathbf{g}(x)$. (Les autres hypothèses restant inchangées).

3) Si $\mathbf{f}$ est solution de F_1 sur $]\,0\,,\infty\,[$, trouver une équation différentielle vérifiée par la fonction $\mathbf{g}$ définie pour tout $x > 0$ par $\mathbf{g}(x) = \sqrt{x}\,\mathbf{f}(x)$.

4) On admettra que les solutions $\mathbf{g}$ de l'équation obtenue au 3) peuvent s'exprimer au moyen de deux fonctions u et v définies et C^1 sur R^{*+} , telles que :
$\forall\, x > 0 \quad \mathbf{g}(x) = u(x)\sin(\,x + v(x)\,)$ et telles que $\mathbf{g}'(x) = u(x)\cos(\,x + v(x)\,)$.

a) Exprimer sur tout intervalle où u ne s'annule pas v' et u'/u à l'aide de v et de x.

b) En déduire, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence de deux réels α et β tels que : $x\,(\mathbf{g}(x) - \alpha \sin(x + \beta))$ soit bornée sur $[\,\varepsilon, \infty\,[$.

c) En déduire que si $\mathbf{f}$ est une solution de F_1 sur $]\,0, \infty\,[$ il existe alors deux constantes α et β telles que : $\mathbf{f}(x) = \dfrac{\alpha \sin(x+\beta)}{\sqrt{x}} + o(1/x)$.

$o(1/x)$ désignant une fonction telle que la limite quand x tend vers plus l'infini de $x\,o(1/x)$ existe et soit égale à zéro.