

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES II - ALGÈBRE

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices est autorisée

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel euclidien orienté de dimension $n \geq 2$. Pour p entier naturel non nul, on note $M_p(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels, et $M_{p,1}(\mathbb{R})$ celui des matrices à p lignes et une colonne à coefficients réels. Le produit scalaire sera noté $(\cdot | \cdot)$.

Si $X = (x_1, \dots, x_p)$ est élément de E^p , on note $G(X)$ la matrice de $M_p(\mathbb{R})$ de terme général $(x_i | x_j)$, et F l'espace engendré par X .

On rappelle que E^* désigne l'espace des formes linéaires sur E .

Si B est une base orthonormée de F , on note $P_B(X)$ la matrice du système X dans B , dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est formée des coordonnées de x_j dans B .

Si H est un sous-espace de E et x un vecteur, on note $d(x, H) = \inf \{ \|x - h\|; h \in H \}$.

Partie 1

- 1) a) Montrer que, pour i fixé, si $(\lambda_j)_{j \neq i} \in \mathbb{R}^{p-1}$

$$\det(G(X)) = \det(G(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j, x_{i+1}, \dots, x_p)).$$
 b) Montrer que si X est liée, $\det(G(X)) = 0$.
 c) Montrer que $\det(G(X))$ ne dépend pas de l'ordre de x_1, \dots, x_p .

- 2) a) Soit B une base orthonormée de F . Etablir l'égalité : $G(X) = {}^t P_B(X) \cdot P_B(X)$.
 b) En déduire que $\det(G(X)) \geq 0$ et que si X est libre, $\det(G(X)) > 0$.

- 3) On note C_1, \dots, C_p les colonnes de $G(X)$, éléments de $M_{p,1}(\mathbb{R})$.
 - a) Pour q entier au plus égal à p , montrer que la famille (x_1, \dots, x_q) est libre dans E si et seulement si la famille (C_1, \dots, C_q) est libre dans $M_{p,1}(\mathbb{R})$.
 - b) En déduire que le rang de $G(X)$ est égal au rang de la famille X .

Partie 2

On suppose dans cette partie que X est une famille libre. On note, pour i entre 2 et $p-1$, F_i l'espace engendré par (x_1, \dots, x_i) , et p_i la projection orthogonale sur F_i .

On pose $u_1 = x_1$, et pour i entre 1 et $p-1$, $u_{i+1} = x_{i+1} - p_i(x_{i+1})$.

1) a) Prouver que u_{i+1} est la projection orthogonale de x_{i+1} sur $F_{i+1} \cap F_i^\perp$.

b) Montrer que $B_I = \left(\frac{u_i}{\|u_i\|} \right)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ est une base orthonormée de F .

2) Etablir qu'il existe un unique $(p-1)$ -uplet $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket}$ tel que : $\forall i, \begin{cases} \alpha_i \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right[\\ \cos(\alpha_i) = \frac{(x_{i+1} | u_{i+1})}{\|x_{i+1}\| \|u_{i+1}\|} \end{cases}$.

3) En utilisant B_I , prouver que $\det(G(X)) = \prod_{i=1}^p \|x_i\|^2 \prod_{j=1}^{p-1} \cos^2(\alpha_j)$. En déduire que

$$\det(G(X)) \leq \prod_{i=1}^p \|x_i\|^2. \text{ Cas d'égalité ?}$$

Partie 3

1) Avec les notations précédentes, montrer que, si X est libre, pour tout x de E ,

$$d(x, F)^2 = \frac{\det(G(x, x_1, \dots, x_p))}{\det(G(x_1, \dots, x_p))}.$$

2) On suppose dans cette question que E est un espace euclidien orienté de dimension 3.

Prouver que si (x_1, x_2) est une famille libre, $\|x_1 \wedge x_2\|^2 = G(x_1, x_2)$.

On veut maintenant généraliser le résultat précédent en dimension quelconque. On considère donc E espace euclidien orienté de dimension $n \geq 3$. On considère $X = (x_1, \dots, x_{n-1})$ de E^{n-1} , et F le sous-espace engendré par cette famille.

3) a) Rappeler la dimension de E^* .

b) Montrer que $\theta : E \rightarrow E^*$ définie par : $\forall y \in E, \theta(x)(y) = (x|y)$ est un isomorphisme.

c). Soit B une base orthonormée directe de E . Montrer que l'application

$\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur E . En déduire l'existence et

l'unicité de z tel que : $\forall y \in E, \det(P_B(x_1, \dots, x_{n-1}, y)) = (z|y)$.

On notera $z = v(X)$.

- 4) Prouver que si X est une famille liée alors $v(X)$ est nul.
En utilisant y non nul de F^\perp , prouver que si X est une famille libre, alors $v(X)$ est non nul.
- 5) Etablir que $v(X)$ appartient à F^\perp , et que si X est une famille libre, alors $(x_1, \dots, x_{n-1}, v(X))$ est une base directe de E . Exprimer alors pour y de E la projection orthogonale de y sur F et sur F^\perp en fonction de y et de $v(X)$.
- 6) En utilisant en particulier la question **partie 1-2)** et la question **partie 3-5)**, montrer que si X est une famille libre, alors $\|v(X)\|^2 = \det(G(x_1, \dots, x_{n-1}))$.