SESSION DE 2000

Filière PC, PSI

EPREUVE DE MATHEMATIQUES II - ALGEBRE

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices est autorisée

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel euclidien orienté de dimension $n\geq 2$. Pour p entier naturel non nul, on note $M_p(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels, et $M_{p,1}(\mathbb{R})$ celui des matrices à p lignes et une colonne à coefficients réels. Le produit scalaire sera noté $(.|..)$.

Si $X=(x_1,\dots,x_p)$ est élément de E^p, on note $G(X)$ la matrice de $M_p(\mathbb{R})$ de terme général $(x_i|x_j)$, et F l'espace engendré par X.

On rappelle que E^* désigne l'espace des formes linéaires sur E.

Si B est une base orthonormée de F, on note $P_B(X)$ la matrice du système X dans B, dont la $j^{ème}$ colonne est formée des coordonnées de x_j dans B.

Si H est un sous-espace de E et x un vecteur, on note $d(x,H)=\inf\{\|x-h\|; h\in H\}$.

Partie 1

1) a) Montrer que, pour i fixé, si $(\lambda_j)_{j\neq i}\in\mathbb{R}^{p-1}$
$det(G(X))=det(G(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+\sum_{j\neq i}\lambda_j x_j,x_{i+1},\dots,x_p))$.

b) Montrer que si X est liée, $det(G(X))=0$.

c) Montrer que $det(G(X))$ ne dépend pas de l'ordre de $x_1,\dots,x_p$.

2) a) Soit B une base orthonormée de F. Etablir l'égalité : $G(X)={}^tP_B(X).P_B(X)$.

b) En déduire que $det(G(X))\geq 0$ et que si X est libre, $det(G(X))>0$.

3) On note $C_1,\dots,C_p$ les colonnes de $G(X)$, éléments de $M_{p,1}(\mathbb{R})$.

a) Pour q entier au plus égal à p, montrer que la famille $(x_1,\dots,x_q)$ est libre dans E si et seulement si la famille $(C_1,\dots,C_q)$ est libre dans $M_{p,1}(\mathbb{R})$.

b) En déduire que le rang de $G(X)$ est égal au rang de la famille X.

Tournez la page S.V.P.

Partie 2

On suppose dans cette partie que X est une famille libre. On note, pour i entre 2 et $p-1$, F_i l'espace engendré par $(x_1,\dots,x_i)$, et p_i la projection orthogonale sur F_i.

On pose $u_1=x_1$, et pour i entre 1 et $p-1$, $u_{i+1}=x_{i+1}-p_i(x_{i+1})$.

1) **a)** Prouver que u_{i+1} est la projection orthogonale de x_{i+1} sur $F_{i+1}\cap F_i^{\perp}$.

b) Montrer que $B_1=\left(\dfrac{u_i}{\|u_i\|}\right)_{i\in[\![1;p]\!]}$ est une base orthonormée de F.

2) Etablir qu'il existe un unique (p-1)-uplet $(\alpha_i)_{i\in[\![1;p-1]\!]}$ tel que : $\forall i,\begin{cases}\alpha_i\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[\\ cos(\alpha_i)=\dfrac{(x_{i+1}|u_{i+1})}{\|x_{i+1}\|\cdot\|u_{i+1}\|}\end{cases}$.

3) En utilisant B_1, prouver que $det(G(X))=\prod_{i=1}^{p}\|x_i\|^2\prod_{j=1}^{p-1}cos^2(\alpha_j)$. En déduire que

$det(G(X))\leq\prod_{i=1}^{p}\|x_i\|^2$. Cas d'égalité ?

Partie 3

1) Avec les notations précédentes, montrer que, si X est libre, pour tout x de E,
$d(x,F)^2=\dfrac{det(G(x,x_1,\dots,x_p))}{det(G(x_1,\dots,x_p))}$.

2) On suppose dans cette question que E est un espace euclidien orienté de dimension 3.
Prouver que si (x_1,x_2) est une famille libre, $\|x_1\wedge x_2\|^2=G(x_1,x_2)$.

On veut maintenant généraliser le résultat précédent en dimension quelconque. On considère donc E espace euclidien orienté de dimension n≥3. On considère $X=(x_1,\dots,x_{n-1})$ de E^{n-1}, et F le sous-espace engendré par cette famille.

3) **a)** Rappeler la dimension de E^*.

b) Montrer que $\begin{matrix}\theta:E\to E^*\\ x\to\theta(x)\end{matrix}$ définie par : $\forall y\in E,\theta(x)(y)=(x|y)$ est un isomorphisme.

c). Soit B une base orthonormée directe de E. Montrer que l'application
$\begin{matrix}\varphi:E\to\mathbb{R}\\ y\to det(P_B(x_1,\dots,x_{n-1},y))\end{matrix}$ est une forme linéaire sur E. En déduire l'existence et l'unicité de z tel que : $\forall y\in E,det(P_B(x_1,\dots,x_{n-1},y))=(z|y)$.
On notera $z=v(X)$.

4) Prouver que si X est une famille liée alors $v(X)$ est nul.
En utilisant y non nul de $F^{\perp}$, prouver que si X est une famille libre, alors $v(X)$ est non nul.

5) Etablir que $v(X)$ appartient à $F^{\perp}$, et que si X est une famille libre, alors $(x_1,\dots,x_{n-1}, v(X))$ est une base directe de E. Exprimer alors pour y de E la projection orthogonale de y sur F et sur $F^{\perp}$en fonction de y et de $v(X)$.

6) En utilisant en particulier la question **partie 1-2)** et la question **partie 3-5)**, montrer que si X est une famille libre, alors $\|v(X)\|^2 = det(G(x_1,\dots,x_{n-1}))$.