

SESSION 2000

Filière PC

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES I - ANALYSE

Durée : 3 heures

L'usage des calculatrices est autorisé.

La présentation et la rigueur de la rédaction seront deux éléments importants dans l'appréciation des copies. En particulier il est demandé d'énoncer avec précision les hypothèses des théorèmes utilisés.

L'énoncé comporte quatre pages. Chaque question peut être traitée en admettant les résultats des questions précédentes.

Notations

On désignera par R l'ensemble des nombres réels et par N^* l'ensemble des entiers naturels non nuls.

Pour tout entier $k > 0$ on notera u_k la fonction définie sur R_+ par : $u_k(x) = (2k^2x^2 - 1)e^{-k^2x^2}$.

Pour $x > 0$ la somme de la série $\sum_{k \geq 1} u_k(x)$ sera désignée par $S(x)$ et la somme partielle de

rang n , $\sum_{k=1}^n u_k(x)$ sera notée $S_n(x)$. On admettra que : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Partie I

*Dans cette partie, on établit que S est intégrable sur R_+^**

I.a) Justifier la convergence uniforme de la série $\sum_{k \geq 1} u_k$ sur tout intervalle $[a, b] \subset R_+^*$.

Tournez la page S.V.P.

b) Montrer que la fonction S est continue sur R_+^* .

2.a) Prouver que pour tout entier non nul k , u_k est intégrable sur R_+ .

b) Calculer $\int_0^{+\infty} u_k(t)dt$ et en déduire que la somme de la série $\sum_{k \geq 1} \int_0^{+\infty} u_k(t)dt$ est nulle. (*Indication* : On pourra intégrer par parties $\int_{\varepsilon}^A 2k^2 t^2 e^{-k^2 t^2} dt$.)

c) Etudier la nature de la série $\sum_{k \geq 1} \int_0^{+\infty} |u_k(t)| dt$.

(*Indication* : On pourra remarquer que $\int_0^{+\infty} |u_k(t)| dt \geq \int_{\frac{1}{k}}^{+\infty} u_k(t)dt$.)

3. Soit $a \geq 1$ et f une fonction continue et positive sur R_+ , croissante sur $[0, a]$ et décroissante sur $[a, +\infty[$.

On pose pour tout entier naturel k : $d_k(f) = f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt$.

a) Démontrer que la série $\sum_{k \geq 0} d_k(f)$ est convergente. On notera $D(f)$ sa somme.

b) Déterminer un entier naturel p , indépendant de f et de a , tel que : $|D(f)| \leq p f(a)$.

(*Indication* : On pourra encadrer $d_k(f)$ en distinguant les différents cas : $k \geq a$, $k < a-1$ et $a > k \geq a-1$)

On admettra dans la suite du problème que cette majoration est encore valable pour $a \geq 0$.

4. On fixe $x > 0$. On considère les fonctions $f_1 : t \mapsto e^{-x^2 t^2}$ et $f_2 : t \mapsto 2x^2 t^2 e^{-x^2 t^2}$.

a) Prouver que : $\int_0^{+\infty} f_1(t)dt = \int_0^{+\infty} f_2(t)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2x}$

b) En utilisant la question I 3 b) appliquée aux fonctions f_1 et f_2 , démontrer les propositions suivantes :

i) S est bornée sur R_+^* .

ii) $\exists M_1 > 0, \forall x \in R_+^*, \forall n \in N^* \left| \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| \leq M_1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2x}$

5.a) Etablir l'inégalité suivante: $\forall w \in R_+ \quad w \leq 4 e^{\frac{w}{4}}$.

b) En déduire que : $\forall x \geq 1, \forall k \in N^*, 0 \leq u_k(x) \leq 4 e^{-\frac{k^2 x^2}{2}} \leq 4 e^{-\frac{k x^2}{2}}$.

c) Puis démontrer que : $\forall x \geq 1 \quad (e^{\frac{x^2}{2}} - 1) S(x) \leq 4$

6. Déduire de ce qui précède que la fonction S est intégrable sur R_+^* .

Partie II

*L'objet de cette partie est le calcul de l'intégrale de S sur R_+^**

1. Prouver qu'on peut définir deux fonctions Φ et Λ sur $] -1, +\infty[$ en posant :

$$\Phi(x) = \int_0^{+\infty} S(t) t^x dt$$

$$\Lambda(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$$

2. a) Montrer que les fonctions Φ et Λ sont continues sur $] -1, +\infty[$.

b) Calculer $\Lambda(-\frac{1}{2})$.

3. Démontrer que pour tout $x > 0$ on a :

$$\int_0^{+\infty} u_k(t) t^x dt = \frac{x}{2 k^{1+x}} \Lambda\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

4. On pose alors, si cette série converge, $Z(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2 k^{x+1}}$.

a) Donner l'ensemble de définition de Z.

b) Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x Z(x)$

(Indication: On pourra appliquer la question I 3 à la fonction $t \mapsto \frac{1}{2(1+t)^{x+1}}$.)

5. On considère deux réels fixés $\varepsilon > 0$ et $x > 0$.

a) Montrer qu'il existe un réel $\lambda \in]0, 1[$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left| \int_0^\lambda [S(t) - S_n(t)] t^x dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}$

(Indication: On pourra utiliser la question I 4)

Dans la suite de la question 5 on supposera λ choisi de cette façon.

b) Montrer qu'il existe un entier naturel N_1 tel que : $\forall n \geq N_1 \quad \left| \int_\lambda^1 [S(t) - S_n(t)] t^x dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}$

(Indication: On pourra utiliser la question I 1)

c) Montrer qu'il existe un entier naturel N_2 tel que : $\forall n \geq N_2 \quad \left| \int_1^{+\infty} [S(t) - S_n(t)] t^x dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}$

(Indication: On pourra utiliser la question I 5 b)

d) En déduire qu'il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geq N$:

$$\left| \Phi(x) - \sum_{k=1}^n \frac{x}{2k^{1+x}} \Lambda\left(\frac{x-1}{2}\right) \right| < \varepsilon$$

6. Démontrer que pour tout $x > 0$:

$$\Phi(x) = x Z(x) \Lambda\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

7. En utilisant les questions II 2) et II 4) calculer : $\int_0^{+\infty} S(t) dt$.

8. Comparer le résultat de la question II 7) à celui obtenu dans la question I 2 b). Citer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions et expliquer pourquoi il ne s'applique pas ici.