

SESSION DE 1999

Filière PC

## EPREUVE DE MATHÉMATIQUES I - ANALYSE

Durée : 3 heures

*L'usage des calculatrices est autorisé.*

*La présentation et la rigueur des solutions seront deux éléments importants dans l'appréciation des copies.*

*En particulier, les candidats sont priés d'énoncer avec précision les hypothèses des théorèmes utilisés.*

## NOTATIONS

On désigne par  $\mathbb{R}$  l'ensemble des réels et par (E) l'équation:

$$2y \phi(x,y) + (1-x^2) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) - (1-y^2) \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = 0$$

On dira que  $\phi$  est une solution de (E) sur un ouvert  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^2$  si et seulement si :

- i)  $\phi$  est une fonction de classe  $C^1$  sur l'ouvert  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^2$ .
- ii) L'équation (E) est vérifiée pour tout couple  $(x,y)$  de  $\Delta$ .

## PRELIMINAIRES

1. On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x,y) = \frac{1}{1-y^2} \ln \left( \frac{x+y}{1+xy} \right)$$

On note D l'ensemble des couples de réels  $(x,y)$  pour lesquels cette expression a un sens.

Représenter l'ensemble D dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  puis établir que D est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

2. Prouver que  $f$  est de classe  $C^1$  sur D.

Tournez la page SVP

3. Calculer  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  et  $(1-y^2) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - 2yf(x, y)$  pour  $(x, y)$  dans  $D$  puis démontrer que  $f$  est une solution de (E) sur  $D$ .

4. Pour  $x > 0$  et  $y \in ]0, 1[$  comparer  $f(x, y)$  et  $f(\frac{1}{x}, y)$ .

5. Etablir l'inégalité suivante:

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad \forall y \in ]0, 1[ \quad \left| \ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \right| \leq |\ln y|$$

6. Prouver que  $y \rightarrow f(0, y)$  est intégrable sur  $]0, 1[$ . En déduire que pour tout  $x \geq 0$  la fonction  $y \rightarrow f(x, y)$  est intégrable sur  $]0, 1[$ .

On définit alors sur  $[0, +\infty[$  la fonction  $F$  par :

$$F(x) = \int_{]0, 1[} f(x, y) dy$$

### PARTIE I : ETUDE DE F

7. a) Montrer que  $F$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

b) Pour  $x > 0$  comparer  $F(x)$  et  $F(\frac{1}{x})$ . Que vaut  $F(1)$  ?

c) Exprimer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  à l'aide de  $F(0)$ .

8. a) Calculer  $\sum_0^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$  en développant en série de Fourier la fonction  $\varphi$ ,  $2\pi$ -périodique

paire, définie par :  $\forall t \in [0, \pi] \quad \varphi(t) = t$ .

b) En développant  $\frac{1}{1-y^2}$  en série entière, pour  $y \in ]-1, 1[$ , déterminer  $F(0)$ .

9. a) Montrer que  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ .

b) Calculer  $F'(x)$  pour  $x \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ . Comparer le résultat obtenu et  $f(0, x)$ .

c) En déduire  $F'(1)$ . Déterminer la demi-tangente à droite à la courbe représentative de  $F$  pour  $x = 0$ .

10. A l'aide des résultats précédents, construire la courbe représentative de  $F$ .

**PARTIE II : RESOLUTION DE (E)**

11. Soit  $\Omega$  et  $\Omega'$  les ouverts de  $\mathbb{R}^2$  suivants:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y < x\}$$

$$\Omega' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 > 4y\}$$

On considère l'application  $\Psi$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^2$ :

$$\Psi: (x, y) \rightarrow (x + y, xy)$$

- a) Etablir que  $\Psi$  est une bijection de classe  $C^1$  de  $\Omega$  sur  $\Omega'$ .
- b) Calculer le jacobien de  $\Psi$  et en déduire que  $\Psi$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$  de  $\Omega$  sur  $\Omega'$ .

12. Soit  $g$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $\Omega$ .

- a) Montrer qu'il existe une application  $h: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(u, v) \mapsto h(u, v)$   
de classe  $C^1$  sur  $\Omega'$  telle que:  
 $\forall (x, y) \in \Omega \quad g(x, y) = h(x + y, xy)$

b) Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

- i)  $\forall (x, y) \in \Omega \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$
- ii)  $\forall (u, v) \in \Omega' \quad \frac{\partial h}{\partial v}(u, v) = 0$

13. Soit  $H$  une solution de (E) sur  $\Omega_1 = \{(x, y) \in ]-1, 1[^2 / y < x\}$  et  $G$  définie sur  $\Omega$  par

$$G(u, v) = (1 - th^2 v) H(thu, thv)$$

où  $th$  désigne la fonction tangente hyperbolique.

- a) Calculer  $\frac{\partial G}{\partial u}(u, v)$  et  $\frac{\partial G}{\partial v}(u, v)$  à l'aide des dérivées partielles de  $H$ .

b) Déduire de la question 12) qu'il existe une fonction  $\Phi$  de classe  $C^1$  sur  $]-1, 1[$  telle que :

$$\forall (x, y) \in \Omega_1 \quad H(x, y) = \frac{1}{1 - y^2} \Phi\left(\frac{x + y}{1 + xy}\right)$$

[ Indications : On pourra transformer cette égalité en posant  $x = th X$  et  $y = th Y$  sachant que la fonction  $th$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}$  sur l'intervalle  $]-1, 1[$  et que  $th(u + v) = \frac{thu + thv}{1 + thu.thv}$  ]

14. Donner l'ensemble des solutions de (E) sur  $\Omega_1$ .