

## EPREUVE DE MATHÉMATIQUES II - ALGÈBRE

Durée : 3 heures

*L'utilisation des calculatrices est autorisée*

Dans tout le problème,  $E$  désigne un espace vectoriel euclidien de dimension  $p$  non nulle. On note  $\mathcal{L}(E)$  l'espace des endomorphismes de  $E$ , et  $B$  une base orthonormée de  $E$ .

On rappelle que l'application qui à un vecteur  $x$  de  $E$  associe le vecteur colonne de ses coordonnées dans  $B$  est une isométrie vectorielle de  $E$  sur  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  muni du produit scalaire canonique, et que celle qui à un endomorphisme  $u$  associe sa matrice dans  $B$  est un isomorphisme d'algèbres de  $\mathcal{L}(E)$  dans  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

On notera  $I$  l'élément unité de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

Pour  $X$  de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ , on note  $\bar{X}$  l'élément de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$  dont les coefficients sont les conjugués de ceux de  $X$ .

Pour  $A$  de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ , on notera :

$$Sp(A) = \{ \lambda \in \mathbb{R}; \det(A - \lambda I) = 0 \}.$$

$$Ker(A) = \{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}); AX = 0 \}.$$

$$Im(A) = \{ AX; X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \}.$$

On dira qu'un sous-espace  $F$  de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  est stable par  $A$  si  $AF = \{ AX; X \in F \}$  est contenu dans  $F$ .

Pour  $x$  réel, on notera  $[x]$  la partie entière de  $x$ .

En fin, on pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant : si toutes les valeurs propres de  $u$  sont réelles,  $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} Ker((u - \lambda Id)^p)$ , où  $Sp(u)$  désigne l'ensemble des valeurs propres de  $u$ . On admettra

aussi que quels que soient  $\lambda, \mu$  deux réels distincts, et  $q$  et  $q'$  deux entiers naturels non nuls quelconques,  $Ker(u - \lambda Id)^q$  et  $Ker(u - \mu Id)^{q'}$  sont toujours en somme directe.

Pour  $A$  de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ ,  $n$  entier naturel non nul et  $\lambda$  réel, on notera

$$C(\lambda) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (A - \lambda I)^k (A - \lambda I)^{n-k}.$$

## Partie 1

On considère dans cette partie un endomorphisme  $u$  de  $E$ .

Pour  $k$  entier naturel, on note  $N_k = Ker(u^k)$ ,  $n_k = \dim(N_k)$ , et  $I_k = Im(u^k)$  ( $u^k$  désigne la composée  $k$  fois de  $u$ ,  $u^0 = Id$ ).

1) Montrer que pour tout  $k$ ,  $N_k$  est contenu dans  $N_{k+1}$ , et  $I_{k+1}$  est contenu dans  $I_k$ .

- 2) a) En considérant la suite  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , montrer qu'il existe  $k$  tel que  $N_k = N_{k+1}$ .  
 b) On pose  $q = \min\{k; N_k = N_{k+1}\}$ . Prouver que  $q$  est au plus égal à  $p$  que, pour tout  $k$  supérieur ou égal à  $q$ ,  $N_k = N_q$  et que, pour tout  $k$  strictement inférieur à  $q$ ,  $N_k \neq N_{k+1}$ .  
 c) Dédurre de ce qui précède que, pour tout  $k$  supérieur ou égal à  $q$ ,  $I_k = I_q$  et que, pour tout  $k$  strictement inférieur à  $q$ ,  $I_k \neq I_{k+1}$ .
- 3) Prouver que  $N_q \oplus I_q = E$ , et que la restriction de  $u$  à  $I_q$  induit un isomorphisme de  $I_q$  dans lui-même.
- 4) Soit  $\lambda$  réel non nul.  
 a) Montrer que  $N_q$  et  $I_q$  sont stables par  $(u - \lambda \text{Id})$ .  
 b) Montrer que pour tout  $n$ ,  $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id})^n$  est contenu dans  $I_q$ .  
 (On appliquera la décomposition du 3) à un élément de  $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id})^n$ , puis on examinera son image par  $(u - \lambda \text{Id})^n$ ).

## Partie 2

Un élément  $A$  de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  est dit  $n$ -symétrique ( $n$  entier naturel non nul) si  $C(0) = 0$ .

- 1) Montrer que  $A$  est 1-symétrique si et seulement si  $A$  est symétrique.
- 2) a) Pour  $m$  et  $q$  entiers naturels tels que  $m+q < n$ , montrer que : 
$$\sum_{k=m}^{n-q} (-1)^k C_n^k C_k^m C_{n-k}^q = 0.$$
  
 b) Prouver que si  $A$  est  $n$ -symétrique, pour tout réel  $\mu$ ,  $A - \mu I$  est aussi  $n$ -symétrique.
- 3) a) Soit  $A$  de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  telle que  $A = T + N$ , avec  $T$  symétrique,  $TN = NT$ , et  $N^r = 0$ . Etablir que  $A$  est  $2r-1$ -symétrique.  
 b) Prouver que si  $A$  est  $2r-1$ -symétrique, alors  $A$  est  $2r$ -symétrique. (Ecrire  $C_{2r}^k = C_{2r-1}^{k-1} + C_{2r-1}^k$ )

## Partie 3

Le but de cette partie et de la suivante est d'étudier une réciproque du **Partie 2.3)** pour les endomorphismes de  $E$ . Dans cette partie  $A$  est une matrice  $n$ -symétrique.

- 1) Soient  $\lambda, \mu$  deux complexes et  $X, Y$  deux éléments non nuls de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$  tels que  $AX = \lambda X$  et  $AY = \mu Y$ .  
 a) Calculer  $A \bar{Y}$  en fonction de  $\mu$  et de  $\bar{Y}$ .  
 b) En calculant  ${}^t \bar{Y} C(0) X$ , montrer que  $(\lambda - \bar{\mu})^n {}^t \bar{Y} X = 0$ .  
 c) Dédurre de ce qui précède que toutes les valeurs propres de  $A$  sont réelles, et que si  $\lambda, \mu$  sont deux éléments distincts de  $\text{Sp}(A)$  alors  $\text{Ker}(A - \lambda I)$  et  $\text{Ker}(A - \mu I)$  sont orthogonaux.
- 2) Soit  $Y$  de  $\text{Ker}(A - \mu I)$  et  $X$  de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ . Montrer que  ${}^t Y C(0) X = {}^t Y (A - \mu I)^n X$  et en déduire que  $\text{Ker}(A - \mu I)$  est orthogonal à  $\text{Im}(A - \mu I)^n$ .

- 3) Soit  $q = \min\{k; \text{Im}((A - \mu I)^k) = \text{Im}((A - \mu I)^{k+1})\}$ .
- Prouver que  $\text{Ker}(A - \mu I)$  est orthogonal à  $\text{Im}(A - \mu I)^q$ .
  - Montrer par récurrence sur  $k$  que  $\text{Ker}(A - \mu I)^k$  est orthogonal à  $\text{Im}(A - \mu I)^q$   
(pour  $Y$  de  $\text{Ker}(A - \mu I)^{k+1}$ , on posera  $X = (A - \mu I)Y$ , et on prouvera que pour tout  $Z$  de  $\text{Im}(A - \mu I)^q$ ,  
 $\langle Y, CZ \rangle = \langle Y, (A - \mu I)^n Z \rangle$ )
  - Déduire de ce qui précède, en utilisant I.4), que si  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux éléments distincts de  $\text{Sp}(A)$ , alors  $\text{Ker}(A - \mu I)^p$  et  $\text{Ker}(A - \lambda I)^p$  sont orthogonaux.
  - Etablir que pour tout  $\lambda$ ,  $\text{Ker}(A - \lambda I)^p$  est stable par  $A$ .
- 4) On suppose dans cette question que  $A$  est nilpotente et  $A^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \neq 0$ .
- Montrer qu'il existe  $X$  de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  tel que  $Y = A^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} X \neq 0$  et que pour tout  $k > \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ ,  
 $A^k X = 0$ .
  - On suppose que  $n = 2r$ . Calculer  $\langle X, C(0)X \rangle$  en fonction de  $Y$  et de  $r$  et en déduire une contradiction.
  - On suppose  $n = 2r + 1$ . Conclure comme au b) en calculant  $\langle (AX), C(0)X \rangle$  en fonction de  $Y$  et de  $r$ .

#### Partie 4

Dans cette partie on considère  $u$  endomorphisme de  $E$ , de matrice dans la base  $B$  égale à  $A$ .  $u$  est dit  $n$ -symétrique si  $A$  est  $n$ -symétrique.

- montrer que cette définition ne dépend pas de la base orthonormée choisie.
- Prouver que si  $u = \theta + v$ , avec  $\theta$  symétrique,  $\theta v = v\theta$  et  $v^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} = 0$ , alors  $u$  est  $n$ -symétrique.
- On suppose que  $u$  est  $n$ -symétrique. D'après III,  $E$  est somme directe orthogonale des  $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id})^p$ ,  $\lambda$  parcourant le spectre de  $u$ .  
En considérant les endomorphismes  $u_\lambda$  induits par  $u$  sur les  $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id})^p$ ,  $\lambda$  parcourant le spectre de  $u$ , montrer que  $u = \theta + v$ , avec  $\theta$  symétrique,  $\theta v = v\theta$  et  $v^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} = 0$ .
- Prouver que  $u$  est  $2r$ -symétrique si et seulement si  $u$  est  $2r-1$ -symétrique. Quels sont les endomorphismes  $2$ -symétriques?