SESSION DE 1999

Filière MP

EPREUVE DE MATHEMATIQUES I

Durée : 3 heures

L'utilisation de toute calculatrice est interdite

Premier problème

0 représente la matrice nulle dans $M_3(\mathbb{C})$, C étant le corps des nombres complexes. On convient, pour A élément de $M_3(\mathbb{C})$, de noter encore A l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ est A.

A. Soit $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$;

1. Calculer J^n pour tout n entier relatif .
2. Soit $H = \{ X \in M_3(\mathbb{C}) \,/\, X.J = J.X \}$
   a) Montrer que H est une sous- algèbre de dimension 3 de $M_3(\mathbb{C})$ et donner une base de H .
   b) Montrer que tous les éléments de H sont diagonalisables.
   c) Préciser, à l'aide de leurs composantes sur la base déterminée en 2.a., les éléments non nuls de H qui ne sont pas inversibles .

B. Soit K un sous-espace de $M_3(\mathbb{C})$, stable pour le produit matriciel et contenant la matrice identité I ; on suppose, en outre, que tout élément de K est diagonalisable .
1. Montrer que, pour tout X dans K et pour tout entier naturel non nul k, si $X^k = 0$, alors $X = 0$.
2. Soient X' et X'' deux projecteurs éléments de K; en utilisant les matrices $X'.X''.(I-X')$ et $(I-X').X''.X'$ et leurs carrés, montrer que : $X'.X'' = X''.X'$.
3. Soit X un élément non nul de K, de valeurs propres distinctes $l_1,..,l_r$, $r \geq 2$; on pose, pour i variant de 1 à r, $p_i(X) = \prod_{j=1, j\neq i}^{r} (X - l_j I)$.
   a) Soit Q le polynôme unitaire de racines simples $l_1, \ldots, l_r$; montrer que $Q(X) = 0$, puis que, si i et j sont différents, $p_i(X).p_j(X) = O$.
   b) Vérifier l'existence d'un scalaire m_i tel que $m_i.p_i(X)$ soit un projecteur $p'_i(X)$.

c) Montrer que, pour tout i, $p'_i(X)$ est dans K, et que $X = \sum_{i=1}^{r} l_i . p'_i(X)$.

d) Déduire de ce qui précède que, quelques soient X et Y dans K, X.Y = Y.X .

4. On suppose que K contient un élément ayant trois valeurs propres distinctes .

a) Montrer l'existence d'une base de C^3 propre pour tout X dans K .

b) Montrer que K est de dimension 3.

Deuxième problème

1. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n supérieure ou égale à 2, de produit scalaire noté (*|*) .Soit v un automorphisme symétrique positif de E ; on note E_v l'espace euclidien défini par E et le produit scalaire [x | y] = (x | v(y)) .Si u est un endomorphisme de E symétrique pour (*|*), montrer que $v^{-1} \circ u$ est un endomorphisme symétrique de E_v .(pour [*|*]).
2. Soient A et B éléments de M_n (R), symétriques et telles que A est définie positive .
   a) Montrer que les valeurs propres de A.B sont toutes réelles .
   b) Montrer que ce résultat n'est plus vrai en général si la matrice A n'est pas définie positive (ou négative), de même que la matrice B .
3. Soit q une forme quadratique définie positive sur R^n, et soient f et g deux formes linéaires sur R^n ; on pose, pour x dans R^n, x non nul, $h(x) = \dfrac{f(x).g(x)}{q(x)}$
   a) Montrer que h possède un maximum absolu m sur $R^n \setminus \{0\}$;
   b) Soit B une base de R^n, et soient L_1, L_2 et A les matrices respectives de f, g et q dans cette base ; si $N = A^{-1}.({}^tL_1.L_2 + {}^tL_2.L_1)$, évaluer m à l'aide des valeurs propres de N .
   c) Soit $k : (x,y,z) \in R^3 \setminus\{0\} \to \dfrac{y(x+y+z)}{x^2+xy+y^2+z^2}$; déterminer le maximum et le minimum de k sur $R^3 \setminus\{0\}$.