ESIM .

SESSION DE 2000

Option MP

EPREUVE DE MATHEMATIQUE II -ANALYSE

Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

Notations

L'ensemble des entiers naturels, des entiers relatifs, des nombres réels, des nombres réels strictement positifs et des nombres complexes sont notés respectivement **N**, **Z**, **R**, $\mathbf{R}_+^*$ et **C**.

Si f est une application d'un intervalle de **R** dans **C** k fois dérivable, $f^{(k)}$ désigne la fonction dérivée k-ème de f et $f^{(0)} = f$.

Il est demandé au candidat la plus grande rigueur dans les calculs et les raisonnements. En particulier, les hypothèses des théorèmes utilisés doivent être soigneusement mises en évidence.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes. La partie 3, qui ne comprend qu'une question, utilise les parties 1 et 2.

On pourra admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes.

Partie 1

Formule sommatoire de Poisson

– Dans cette partie, f désigne une application de **R** dans **C** de classe C^q où $q \geq 1$ telle que chacune des $q + 1$ fonctions $f^{(k)}$, $k = 0,\ldots, q$, est intégrable sur **R**. –

Question 1

Soit $y \in \mathbf{R}$.

Tournez la page S.V.P.

Montrer que $\forall t \in [y\,, y+1]$, $|f(y) - f(t)| \leq \int_y^{y+1} |f'(u)|\mathrm{d}u$.

En déduire $|f(y)| \leq \int_y^{y+1} |f(t)|\mathrm{d}t + \int_y^{y+1} |f'(t)|\mathrm{d}t$.

Question 2

Montrer que, pour tout réel x, la famille $(f(x+p))_{p\in\mathbf{Z}}$ est sommable.

- On définit une application $S : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ par :

$$\forall x\in\mathbf{R},\ S(x) = \sum_{p\in\mathbf{Z}} f(x+p)$$

Question 3

Montrer que l'application S est périodique de période 1.

Question 4

Soit $(S_N)_{N\in\mathbf{N}}$ la suite de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ définie par $S_N(x) = \sum_{p=-N}^{N} f(x+p)$. Montrer la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbf{R}$ de la suite de fonctions $(S_N)_{N\in\mathbf{N}}$ vers la fonction S.

Montrer que S est de classe C^{q-1}.

– Les deux questions précédentes montrent que l'application $T : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ définie par $T(x) = S\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)$ est 2π-périodique et continue. On note $c_n = c_n(T)$ les coefficients de Fourier de T ($n \in \mathbf{Z}$) –

Question 5

Montrer que $\forall n \in \mathbf{Z}$, $c_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2ni\pi t}\,\mathrm{d}t$.

Question 6

Montrer que si $q \geq 2$ alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{2ni\pi x}.$$

Partie 2

Calcul d'une intégrale

– On définit une fonction g par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+t^2} e^{it} \mathrm{d}t\,. -$$

Question 7

Montrer que $g(x)$ est bien défini pour tout réel x strictement positif.

Question 8

Montrer que g est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^*$ et exprimer $g'(x)$ et $g''(x)$ à l'aide d'intégrales.

Question 9

Calculer $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)$ pour $(x,t) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ et en déduire que g est solution sur $\mathbf{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y'' - y = 0$.

Question 10

Montrer que, pour tout $x > 0$, $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+u^2} e^{ixu} \mathrm{d}u$.

En déduire que g est bornée sur $\mathbf{R}_+^*$ et que $g(x) \xrightarrow[x \xrightarrow{>} 0]{} \pi$.

Question 11

Calculer $g(x)$ pour tout $x > 0$.

Partie 3

Application

Question 12

Soit a un réel strictement positif. En utilisant les résultats des questions 6 puis 11, calculer, pour tout x réel :

$$\sum_{p \in \mathbf{Z}} \frac{1}{a^2 + (x+p)^2}\,.$$