CONCOURS ESIM Entrepreneur Industrie - Session 2001

Filière MP

EPREUVE DE MATHEMATIQUES I

Durée : 3 heures
L'utilisation de toute calculatrice est interdite pour cette épreuve

---

Préliminaires

Dans toute la suite, N désigne l'ensemble des entiers naturels, R celui des réels, C celui des complexes, R[X] celui des polynômes à une variable à coefficients réels et, pour n entier naturel, $R_n[X] = \{ P \in R[X] \;/\; d^\circ P \leq n \}$; $\mathcal{M}_n(K)$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients dans K, avec K = R ou C .Si A est une matrice, ${}^tA$ représente sa transposée .

PROBLEME 1

Soit n un entier au moins égal à 2 ; pour i entier variant de 0 à n, on considère le polynôme:

$$P_i(X) = (1 - X)^i(1 + X)^{n-i} \;;$$

si a_{ij} est le coefficient de X^{i-1} dans P_{j-1}, soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n+1}(R)$;

on note $E = R_n[X]$ et $B = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de E .

1. Dans cette question seulement n = 2 ; expliciter A et déterminer ses éléments propres.

2. Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de E .(On pourra étudier , pour i fixé , les indices j tels que $(1+X)^{n-i}$ divise P_j)

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $M_B(u) = A$;

a. Calculer ,pour tout j , $\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} P_{i-1}$.

b. Calculer A^2 et en déduire le polynôme minimal de A ; A est-elle diagonalisable ?

c. Calculer | dét A | .

4. On suppose n impair dans cette question ;soit m = (n-1)/2 ;

a. Montrer que $B_1 = (1, X, X^2, \ldots, X^m, P_0, \ldots, P_m)$ est une base de E {on pourra étudier les diviseurs communs à $P_0, \ldots, P_m$ }

b. Déterminer $M_{B_1}(u)$; en déduire le déterminant et la trace de A .

c. Quelles sont les valeurs propres de A ?

Tournez la page S.V.P.

5. On suppose maintenant n pair et l'on pose $m = n/2$;
   a. Montrer que $B_2 = (1, X, \dots, X^{m-1}, P_0, \dots, P_m)$ est une base de E .
   b. Déterminer $M_{B_2}(u)$; en déduire le déterminant et la trace de A .
   c. Quelles sont les valeurs propres de A ?

PROBLEME 2

Soit n un entier au moins égal à 3 ; si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $c(A)$ sa comatrice, de terme général A_{ij} , cofacteur de a_{ij} dans A . On rappelle les relations:

$$A\,.{}^t c(A) = {}^t c(A).A = \text{dét}\, A.I_n \quad \text{où } I_n \text{ est la matrice unité .}$$

On note $\chi_A(t)$ le polynôme dét $(A - t\,.I_n)$. On confond tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ qu'il représente dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ .On se propose de caractériser les matrices qui sont des comatrices.

1. Soient $A_0, \dots, A_r$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varphi(t) = \sum_{i=0}^{r} t^i A_i$,t élément de C ; si φ s'annule pour plus de r valeurs de t , montrer que les A_i sont toutes nulles .

2._
   a. Si A est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,montrer l'existence et l'unicité de $R_0, \dots, R_{n-1}$ telles que, pour tout t dans C ,

$${}^t c(A - t.I_n) = \sum_{i=0}^{n-1} t^i R_i \ .$$

   b. Soit $P(t) = \dfrac{\chi_A(0) - \chi_A(t)}{t}$; démontrer: $c(A) = P({}^t A)$.

3._
   a. Si A est de rang n , montrer que c(A) est de rang n ; que vaut c(c(A)) ?
   b. Si A est de rang $n-1$ et si $L_1, \dots, L_n$ sont ses lignes ,calculer $c(A)\,.{}^t L_i$ pour tout i et vérifier que le rang de c(A) est 1.
   c. Si A est de rang au plus $n-2$,montrer que c(A) est nulle.

4. Soient M , N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$;
   a. Si M et N sont inversibles , montrer que $c(M.N) = c(M).c(N)$
   b. Soient $M(t) = M - t.I_n$ et $N(t) = N - t.I_n$, t complexe ; montrer que , pour tout t de module assez petit, $c(M(t).N(t)) = c(M(t)).c(N(t))$.
   c. Vérifier que ,pour M et N quelconques , $c(M.N) = c(M).c(N)$.
   d. Si M est un projecteur , que peut-on dire de c(M) ?

5. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A projecteur de rang $n-1$;
   a. Déterminer $\chi_A(t)$.(On pourra utiliser une base de Im A et une base de Ker A)
   b. Montrer que $c(A) = I_n - {}^t A$.
   c. Si M est un projecteur de rang 1 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que M est une comatrice .

6. Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, M diagonalisable de rang 1 ;
   a. Montrer l'existence de λ complexe non nul tel que $\lambda\,.M$ est un projecteur .
   b. Montrer que M est une comatrice .

7. Soit A dans $M_n(C)$,A non diagonalisable et de rang 1 ;

   a. Montrer que $A^2 = 0$ et que A est semblable à $A_1 = (\alpha_{ij})$, avec $\alpha_{1,n} = 1$ et $\alpha_{ij} = 0$ sinon .

   b. Soit $D_1 = (\beta_{ij})$ dans $M_n(C)$, avec $\beta_{ii} = 1$ pour $i = 2,\dots,n-1$, $\beta_{1n} = -1$ et $\beta_{ij} = 0$ dans tous les autres cas ; calculer $D_1^2 - D_1$,$D_1 A_1$ et $A_1 D_1$;que vaut rang D_1?

   c. Montrer l'existence de D de rang n-1 telle que : $D^2 - D = A$,$A.D = D.A = 0$ et $I_n - D$ est de rang 2 ;comparer D^3 et D^2 .

   d. Montrer que $\chi_D(t) = t^2.(1-t)^{n-2}$ et en déduire c(D) .

   e. Montrer que A est une comatrice .

8. Caractériser les éléments de $M_n(C)$ qui sont des comatrices .

Fin de l'énoncé