Session de 2000

Filière MP

EPREUVE DE MATHEMATIQUES I

Durée : 3 heures

L'utilisation de toute calculatrice est interdite

Première partie

On désigne par E l'espace des matrices colonnes d'ordre 3 à coefficients réels. E est muni du produit scalaire noté $(\ |\ )$: $\forall\, X, Y \in E \quad (X|Y) = {}^tX.Y$ où ${}^tX$ désigne la matrice ligne transposée de la matrice colonne X.

On rappelle qu'une matrice carrée M, d'ordre 3, est dite antisymétrique si ${}^tM = -M$.

$SO(3)$ désigne le groupe des matrices carrées d'ordre 3 orthogonales de déterminant 1, soit $A \in SO(3) \Leftrightarrow {}^tA.A = I$ et $\det(A) = +1, I$ désignant la matrice unité d'ordre 3.

L'espace $\mathbb{R}^3$ est supposé orienté et l'orientation choisie fait de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ une base directe. Si X et Y appartiennent à E, on désigne par $X \wedge Y$ l'élément de E représentant dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ le produit vectoriel $x \wedge y$ des vecteurs x et y de $\mathbb{R}^3$ représentés respectivement par X et Y dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Enfin si $X \in E$ on désignera par J_X la matrice d'ordre 3 définie par $J_X.Y = X \wedge Y$, $\forall\, Y \in E$, où $J_X.Y$ désigne le produit de la matrice carrée J_X d'ordre 3 par la matrice colonne Y d'ordre 3.

1) a) Vérifier que J_X est antisymétrique et que l'application $j : X \in E \mapsto J_X$ est une bijection linéaire de E sur l'espace des matrices carrées antisymétriques d'ordre 3.

b) Vérifier que $J_X.J_Y = Y.\,{}^tX - (X|Y)I$.

c) Montrer que $J_{X\wedge Y} = J_X.J_Y - J_Y.J_X$

2) Soit $X \in E$.

a) Calculer $\exp(J_X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(J_X)^k}{k!}$.

b) Si $X \neq 0_E$, où 0_E est le vecteur nul de E, on pose $U = \frac{X}{\sqrt{{}^tXX}}$. Soit V un vecteur de E de norme 1, orthogonal à U et $W = U \wedge V$. Calculer la matrice de $\exp(J_X)$ dans la base $\{U, V, W\}$ de E. En déduire que $\exp(J_X) \in SO(3)$. Donner la valeur de $\exp(J_{0_E})$.

c) Montrer que $\forall\, X \in E, A \in SO(3), \quad A.\exp\,(J_X).A^{-1} = \exp\,(J_{A.X})$

d) Soit $A \in SO(3)$. Montrer qu'on peut trouver $P \in SO(3)$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = P.\exp\,(\theta J_{I_1}).P^{-1}$ où $I_1 \in E$ avec $I_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

e) En déduire que $\forall\, A \in SO(3)$, il existe $X \in E$ tel que $A = \exp\,(J_X)$.

Deuxième partie

On désigne par $\mathcal{E}$ l'espace des matrices colonnes d'ordre 4 à coefficients réels ; Un élément de $\mathcal{E}$ sera mis sous la forme d'une matrice colonne constituée d'un élément de $\mathbb{R}$ et d'un élément de E, soit si $x \in \mathcal{E}$ on notera $x = \begin{bmatrix} x_o \\ X \end{bmatrix}$ où $x_o \in \mathbb{R}$ et $X \in E$. Si m désigne une matrice carrée d'ordre 4, m sera considérée comme l' application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à la matrice colonne $x, x \in \mathcal{E}$, fait correspondre $m.x$ (produit matriciel) ; ${}^tm$ désignera la matrice transposée de m.

L'espace $\mathcal{E}$ sera muni du produit scalaire : $\forall\, x, y \in \mathcal{E}, < x, y >= x_o y_o + (X|Y)$. $SO(4)$ désigne le groupe des matrices d'ordre 4 orthogonales et de déterminant 1, soit $a \in SO(4) \Leftrightarrow {}^ta.a = i$ et $\det(a) = +1$ où i désigne la matrice unité d'ordre 4.

On désigne pour $X \in E$ par ℓ_X et r_X les matrices carrées d'ordre 4 antisymétriques :

$$\ell_X = \begin{bmatrix} 0 & -{}^tX \\ X & J_X \end{bmatrix}, \qquad r_X = \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ -X & J_X \end{bmatrix}.$$

1) Montrer que $L : X \mapsto l_X$ et $R : X \mapsto r_X$ sont deux applications linéaires injectives de E dans l'espace des matrices antisymétriques d'ordre 4. Montrer alors que les sous espaces images de E par L et R sont des sous espaces

supplémentaires de l'espace des matrices antisymétriques d'ordre 4.

2) Si $x \in \mathcal{E}$, $x = \begin{bmatrix} x_o \\ X \end{bmatrix}$, on désigne par q_x^+ et q_x^- les matrices d'ordre 4 : $q_x^+ = x_o i + \ell_X$, $q_x^- = x_o i + r_X$; par Q^+ l'ensemble des matrices q_x^+ lorsque x parcourt $\mathcal{E}$ et par Q^- l'ensemble des matrices q_x^- lorsque x parcourt $\mathcal{E}$.

Montrer que Q^+ et Q^- sont deux sous espaces vectoriels de l'espace des matrices carrées d'ordre 4, stables pour la multiplication, que les éléments de Q^+ commutent avec les éléments de Q^- et que $Q^+ \cap Q^-$ est l'ensemble des matrices scalaires (multiples de i).

3) Montrer que q_x^+ et q_x^- sont dans $SO(4)$ si et seulement si $< x, x >= 1$. On pourra considérer dans le cas où $X \neq 0$ les matrices de q_x^+ et q_x^- dans la base (e_o, e_1, e_2, e_3) de $\mathcal{E}$ avec $e_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 0_E \end{bmatrix}$, $e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ X \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ Y \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ Z \end{bmatrix}$, où 0_E est le vecteur nul de E, $Y \in E$, Y est orthogonal à X et $Z = X \wedge Y$. On étudiera aussi le cas $X = 0$.

4) a) Montrer que si $x \in \mathcal{E}$ et $< x, x >= 1$ on peut trouver $\theta \in \mathbb{R}$ et $U \in E$ tels que $(U|U) = 1$ et que $x = (\cos\theta, \sin\theta\, U)$.

b) Montrer que pour $x \in \mathcal{E}$ tel que $< x, x >= 1$, le produit $q_x^+ . \, q_x^-$ conserve le vecteur $e_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 0_E \end{bmatrix}$ de $\mathcal{E}$.

5) Soit $a \in SO(4)$

a) Montrer qu'il existe $q \in Q^+$ tel que $q.e_o = a.e_o$

b) En déduire qu'il existe $p \in Q^+$ et $r \in Q^-$ tel que $a = p.r$

c) Montrer que si a admet une autre décomposition $p'.r'$, alors $p' = \varepsilon p$ et $r' = \varepsilon r$ avec $\varepsilon = \pm 1$.