CONCOURS ESIM Entrepreneur Industrie - Session 2001

Filière MP

EPREUVE DE MATHEMATIQUES II

Durée : 3 heures
Calculatrices interdites

Les parties I, II et III sont très largement indépendantes.

Partie I

Soit $f_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_{a,b}(x) = \dfrac{a}{1+(bx)^2}$ et soit $\Gamma_{a,b}$ la courbe représentative de $f_{a,b}$. On note f la fonction correspondant aux paramètres a=1 et b=1.

On rappelle le théorème suivant : « *L'ensemble des solutions sur I, intervalle de $\mathbb{R}$, d'une équation différentielle linéaire du premier ordre $y'(x) + \alpha(x)\, y(x) = 0$, où α est une application continue sur I, a une structure d'espace vectoriel de dimension 1* »

Q1 a- On fixe b=1. Déterminer une équation différentielle ayant comme ensemble de solutions les fonctions $f_{a,1}$, c'est à dire l'espace vectoriel engendré par la fonction f .

b- Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre, (F_b), dépendant de b, ayant pour solutions les fonctions $f_{a,b}$, a décrivant $\mathbb{R}$.

Q2 a- On fixe a = 1. On cherche une équation différentielle du premier ordre ayant pour solutions les fonctions $f_{1,b}$.

a1 Montrer que sur le demi plan x>0, les courbes $\Gamma_{1,b}$, pour b non nul, admettent une équation cartésienne de la forme $x = \beta\, g(y)$ où g est une fonction à déterminer.

a2 Trouver une équation différentielle du premier ordre ayant pour solutions sur l'intervalle $]0\,,\,1[$ les fonctions βg, β décrivant $\mathbb{R}$.

a3 En déduire une équation différentielle de la forme $P(y) - x\,y' = 0$, où P est un polynôme, admettant entre autres les fonctions $f_{1,b}$ pour solutions quand b parcourt $\mathbb{R}$.

b- Ecrire une équation différentielle (G_a) ayant pour solutions entre autres les fonctions $f_{a,b}$, b décrivant $\mathbb{R}$.

Tournez la page S.V.P.

Q3 On cherche maintenant une équation différentielle du second ordre ayant pour solutions les fonctions $f_{a,b}$, (a,b) décrivant $\mathbb{R}^2$.

a- En partant de l'équation (F_b), trouver une équation différentielle (E) indépendante de b liant x, y, y' et y''.

b- Retrouver l'équation (E) en partant de l'équation (G_a).

Soit n un entier naturel strictement positif et soit (En) l'équation différentielle :

$$(En) : \quad x\,y\,y'' - 2\,x\,(y')^2 - n\,y\,y' = 0.$$

Partie II

Q4 Vérifier que si y est une solution de (En) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, les fonctions $x \mapsto y(\lambda x)$ et $x \mapsto \lambda\, y(x)$ sont aussi des solutions de (En) sur des intervalles à préciser.

Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ et y une solution de (En) sur I ne s'annulant pas.

Q5 On définit l'application z par $t \mapsto y(e^t)$.

a Ecrire l'équation différentielle vérifiée par l'application z.

b On pose $Z = \dfrac{1}{z}$. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par l'application Z. En déduire y.

Q6 Existe t-il des solutions de (En) sur un intervalle I de $\mathbb{R}_+^*$ autres que l'application nulle qui s'annulent sur I en un point x_0 ?

Q7 Déterminer les solutions de (En) sur un intervalle J inclus dans $\mathbb{R}_-^*$.

Q8 On utilise une autre méthode pour résoudre l'équation différentielle (En).
Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, et soit y une solution à valeurs strictement positives.
On définit l'application g par la relation $g(x) = \ln(y(x))$.

a Ecrire une équation différentielle vérifiée par g.

b On suppose qu'il existe x_0 appartenant à I tel que $g'(x_0)$ soit non nul. Prouver alors que l'application g' ne s'annule pas sur I.

c On pose alors $G = \dfrac{1}{g'}$. Ecrire une équation différentielle vérifiée par l'application G. Retrouver le résultat de la question 4.

Partie III

On rappelle les résultats suivants : $\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$.

Dans cette partie on choisit n = 2.

On cherche une solutions de (En) sous forme de série entière $y(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^p$ de rayon de convergence R non nul.

Compte tenu de la question 4 on ajoute la condition supplémentaire : y(0) = 1.

Q9 Ecrire le coefficient de x^p du produit yy'', noté α_p, puis celui de $(y')^2$, noté β_p, et enfin celui de x^{p+1} de yy', noté γ_{p+1}.

On écrira ces coefficients sous la forme $\sum_{k=0}^{p+1} A_{p,k} a_k a_{p+2-k}$, où $A_{p,k}$ est à déterminer.

Q10 Montrer que y est solution de (En) si et seulement si :

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall p \geq 0, \quad (p-1)(p+2)a_{p+2} = \sum_{k=1}^{p+1} B_{p,k} a_k a_{p+2-k} \end{cases}$$

où $B_{p,k}$ est un nombre à déterminer.

Q11 On pose $a_3 = \alpha$.

Calculer a_p pour p appartenant à [0,6].

Montrer que seuls les coefficients a_{3q} ne sont pas nuls .

Poser $b_q = a_{3q}$. Ecrire une relation liant b_q , b_{q-1}, …, b_0.

Calculer b_2 et b_3 en fonction de α. Calculer b_q pour tout entier q en fonction de α.

Q12 En déduire y.

Partie IV

On s'intéresse aux solutions définies sur un intervalle I ouvert contenant 0.

Q13 a Trouver toutes les solutions de (En) dans le cas n = 1.

b Les fonctions $f_{a,b}$ sont-elles les seules solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?

Q14 Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

a Trouver les solutions de (En) définies sur I. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

b Le problème de Cauchy : « y solution de (En) sur I, y(0) = a , y'(0) = b » possède-t-il une solution ? si oui est-elle unique ?

Fin de l'énoncé